

FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE



Num.º d'ordine

19.

18439

Palchetto

12-7-32

NAZIONALE

B. Prov.

I

1131

NAPOLI

VITT. EM. III

R. BIBLIOTECA

B. P.

I

1131



607318 • SBN

**TRATTATO ELEMENTARE
D'ARITMETICA**

AD USO

DELLA SCUOLA CENTRALE
DELLE QUATTRO NAZIONI

DEL SIG.

S. F. LACROIX

TERZA VERSIONE ITALIANA

SULLA ULTIMA EDIZIONE DI PARIGI

PUBBLICATA

DA COURCIER.



NAPOLI

DALLA STAMPERIA DI R. MANZI

1831.

81870

TRATTATO ELEMENTARE

D'ARITMETICA

DI GIACOMO

DELL'ARTI

LIBRO

INDICE

Nozioni generali sulle diverse specie di grandezze, o quantità

Della numerazione parlata.	1
Mezzo di rappresentare i numeri con delle cifre, ovvero della numerazione scritta.	2
Maniera di pronunziare un numero.	4
Cosa sia un numero astratto, e concreto.	6
<i>Dell'addizione</i>	7
Principj, sui quali riposa l'addizione.	ivi
Regola generale per eseguire l'addizione.	9
<i>Della sottrazione.</i>	10
Principj, sui quali riposa la sottrazione	ivi
Del senso delle parole <i>resto eccesso, differenza.</i>	ivi
Regola generale della sottrazione.	13
<i>Della prova dell'addizione, e della sottrazione.</i>	ivi
<i>Della moltiplicazione</i>	15
Origine della moltiplicazione.	ivi
Cosa significhino <i>moltiplicando, moltiplicatore, prodotto, fattori.</i>	16
Principj, sui quali riposa la moltiplicazione.	ivi
Tavola di Pitagora, contenente i prodotti necessari a conoscersi per moltiplicare un numero per un altro.	17
Formazione di questa Tavola.	ivi
Osservazione, dalla quale deducesi che un prodotto di due fattori non cangia qualunque sia l'ordine dei fattori.	18
Regola di moltiplicare un numero di più cifre per un numero d'una sola cifra.	20
Come si moltiplichì un numero per 10, 100, ec.	21
Regola di moltiplicare per un numero composto d'una cifra significativa seguita da più zeri.	22
Regola generale della moltiplicazione.	23
Come si compendia la moltiplicazione allorchè il moltiplicando, ed il moltiplicatore son terminati da degli zeri.	24
<i>Della divisione</i>	ivi
Origine della divisione.	25

Principj , su' i quali appoggiasi la divisione.	ivi
Cosa significhino <i>dividendo</i> , <i>divisore</i> , <i>quoziente</i> .	ivi
Cosa bisogni fare allorchè il divisore ha più cifre.	29
Regola generale della divisione.	31
Mezzo per compendiare il calcolo	32
Cosa bisogni fare allorchè il dividendo , ed il divisore son terminati da degli zeri.	33
La divisione, e la moltiplicazione si servono scambievolmente di riprova.	34
<i>Delle frazioni</i>	ivi
Origine delle frazioni.	ivi
Maniera d' enunciare , e di scrivere le frazioni.	36
Cosa significhino <i>numeratore</i> , e <i>denominatore</i> .	ivi
Cangiamento , che prova una frazione allorchè s'augmenta, o si diminuisce un de'suoi termini.	ivi
Tavola rappresentante i cangiamenti, che si eseguisono sopra una frazione moltiplicando, o dividendo un de' suoi termini.	38
Una frazione non cangia di valore allorchè si moltiplicano , o si dividono i suoi due termini per il <i>medesimo</i> numero.	39
Mezzo di semplificare una frazione senza farla cangiar di valore.	ivi
Cosa s' intenda per <i>massimo comune divisore</i> di due numeri.	41
Regola generale per trovare il massimo comune divisore di due numeri.	43
Caratteri , dai quali si riconoscono i numeri divisibili per 2 , per 5 , e per 3.	44
Cosa s' intenda per <i>numeri primi</i> .	46
Della somma , e della sottrazione delle frazioni.	47
Estrazione degl' interi da una frazione.	ivi
Riduzione d' un intero in frazione.	48
Riduzione delle frazioni al medesimo denominatore.	49
Un prodotto composto di più fattori non cangia qualunque sia l'ordine , nel quale si moltiplicano questi fattori.	50
Somma e sottrazione degl'interi uniti a dette frazioni.	52
Cosa significhi generalmente la parola <i>moltiplicare</i> .	53
Moltiplicazione d'un numero intero per una frazione.	54
Moltiplicazione d' una frazione per una frazione.	55

	v
Delle frazioni di frazioni.	56
Cosa sia la divisione in generale.	57
Divisione d' un numero intero per una frazione.	58
Divisione d' una frazione per una frazione.	ivi
<i>Delle frazioni decimali</i>	59
Origine delle frazioni decimali.	ivi
Maniera d'enunciare , e di scrivere i decimali.	60
Non si cangia un numero che, ha delle cifre decimali, ponendo in seguito di queste uno, o più zeri.	61
Somma dei decimali.	62
Sottrazione dei decimali.	63
Cangiamento che si fa variando di posto la virgola.	ivi
Moltiplicazione d' un numero , che contiene dei decimali , per un numero intero.	65
Moltiplicazione d' un numero decimale per un numero decimale.	66
Divisione d' un numero decimale per un numero intero.	67
Divisione d' un numero decimale per un numero decimale.	ivi
Maniera per approssimarsi al quoziente d' una divisione per mezze dei decimali.	ivi
<i>Nota sulla maniera di valutare il quoziente d' una divisione in frazioni d' una specie data.</i>	68
Riduzione delle frazioni ordinarie in decimali.	69
<i>Nota sulla conversione d' una frazione in un' altra d' una specie minore.</i>	ivi
Delle frazioni decimali periodiche.	70
<i>Esposizione del nuovo Sistema metrico, ed applicazioni usuali dell' Aritmetica.</i>	73
Nomenclatura delle diverse specie di Misure.	ivi
Legame delle diverse unità di Misure riportate alla Misura di lunghezza.	74
<i>Nota sul legame delle nuove Misure colle dimensioni della Terra.</i>	75
Esempj dei Problemi , che si presentano più frequentemente in Aritmetica.	76
<i>Delle Proporzioni</i>	79
Problemi , i quali conducono alle porzioni.	ivi
Cosa sia un rapporto, o ragione, e una proporzione.	81

vi	
Un rapporto non cangia allorchè si moltiplicano, o si dividono i suoi due termini per un me- desimo numero.	82
<u>Maniera d'indicare che vi è proporzione tra quat- tro numeri.</u>	ivi
<u>Mezzo d'assicurarsi se vi è proporzione tra quat- tro numeri, o conseguenza notabile, che se ne ricava.</u>	83
<u>Permutazioni, che si possono far subire ai termi- ni d'una proporzione senza turbarla.</u>	84
<u>Come si trovi uno dei quattro termini d'una pro- porzione allorchè gli altri tre sono cogniti.</u>	85
<u>Avvertenza necessaria per porre dei numeri in proporzione.</u>	86
<u>Cosa sia una ragione, o un rapporto inverso.</u>	87
<u>Regola d'interesse.</u>	88
<u>Regola di sconto.</u>	ivi
<u>Nota sulle due maniere di prender lo sconto.</u>	89
<u>Regola del tre composta.</u>	ivi
<u>Cosa sia un rapporto composto.</u>	93
<u>Regola di Compagnia</u>	ivi
<u>Diversi altri Problemi</u>	94
<u>Dell'equidifferenza.</u>	96
<u>Proprietà riguardevole dell'equidifferenza.</u>	97
<u>Nota sulle denominazioni di proporzione geome- trica, e di proporzione aritmetica.</u>	ivi
<u>Regola d'Alligazione</u>	98
<u>Del paragone delle diverse Misure del medesimo genere</u>	100
<u>Rapporti delle Misure antiche alle Misure nuove; metodo per convertire l'une nell'altre.</u>	ivi
<u>Maniera di valutare le Monete, o le Misure d'un Paese mediante quelle di più altri, ovvero regola congiunta.</u>	104
<u>Del calcolo dei numeri complessi</u>	106
<u>Cosa siano i numeri complessi, ed i numeri in- complessi.</u>	ivi
<u>Della somma dei numeri complessi</u>	ivi
<u>Della sottrazione dei numeri complessi</u>	108
<u>Della riprova della somma, e della sottrazione dei numeri complessi</u>	109

	VII
<i>Della moltiplicazione dei numeri complessi</i>	110
Conversione di essi in frazioni.	ivi
Moltiplicazione d' un numero complesso per un numero incompleso.	112
Cosa siano le parti aliquote.	113
<i>Nota sulla denominazione di falso prodotto.</i>	114
<i>Metodo per il caso ove il solo moltiplicatore è complesso.</i>	116
———— per il caso ove il moltiplicando, ed il moltiplicatore sono amendue complessi.	118
Regola generale.	120
<i>Della divisione dei numeri complessi</i>	ivi
Allorchè il dividendo, ed il divisore sono della medesima specie.	121
Allorchè dessi sono di specie differenti, e che il solo divisore è incompleso.	123
Allorchè il dividendo, ed il divisore sono amendue complessi.	ivi
<i>Di alcuni mezzi impiegati per abbreviare i calcoli Aritmetici</i>	125
Metodo per compendiare la moltiplicazione, e la divisione dei numeri grandi.	ivi
<i>Metodo per compendiare la moltiplicazione dei numeri, che contengono dei decimali.</i>	127
Decomposizione d' un numero nei suoi fattori.	129
Idea delle frazioni continue.	131
<i>Sull' applicazione dell' Aritmetica alla Banca, e al commercio.</i>	135
<i>Paragone delle antiche misure colle nuove Francesi.</i>	138
<i>Caratteri usati per denotare le antiche misure Francesi.</i>	ivi
<i>Tavole per la conversione delle Misure antiche in misure nuove Francesi, reciprocamente</i>	141
<i>Paragone di alcune Misure straniere colle nuove Misure Francesi</i>	145
<i>Valore delle principali Monete straniere, secondo il Sig. Boneville.</i>	

FINE DELL' INDICE

SPIEGAZIONE DELLE CIFRE ROMANE

Uno	I	i
Due	II	ii
Tre	III	iii
Quattro.	IV	iv
Cinque	V	v
Sei	VI	vi
Sette	VII	vii
Otto	VIII	viii
Nove	IX	ix
Dieci	X	x
Venti	XX	xx
Trenta	XXX	xxx
Quaranta	XL	xl
Cinquanta	L	l
Sessanta	LX	lx
Settanta	LXX	lxx
Ottanta	LXXX	lxxx
Novanta	XC	xc
Centq	C	c
Dugento	CC	cc
Trecento	CCC	ccc
Quattrocento	CCCC	cccc
Cinquecento	D ovvero IO	d
Secento	DC	dc
Settecento	DCC	dcc
Ottocento.	DCCC	dccc
Novecento	DCCCC	deccc
Mille	M ovvero CIJ	m
Millevento	MC	mc
Milledugento	MCC	mcc
Milletecento	MCCC	mccc
Millequattrocento	MC CCC	mccccc
Millecinquecento	MD	md

OSSEVAZIONE — Qualunque numero posto tra due parentesi indica l'articolo, sul quale appoggiasi quello ov'esso è citato; e fa di mestieri rileggere il primo se non ci rammentiamo il rapporto, che questo può avere con ciò che contiene il secondo.

TRATTATO ELEMENTARE

D' ARITMETICA



Della Numerazione

1. **I**l paragone dei diversi oggetti, i quali cadono sotto i nostri sensi, ci ha fatto ben presto conoscere in tutti questi oggetti un attributo (o qualità), mediante il quale possiam concepirli suscettibili d' aumento, e di decremento : questo attributo è la *grandezza*. Essa si manifesta in generale sotto due forme differenti, cioè,

Ora come una collezione di più cose simili, o di più parti separate; s'indica allora con la parola *numero*:

Ora come un sol tutto, senza distinzione di parti; ed è in questa maniera che si concepisce la distanza tra due punti, o sì vero la lunghezza della linea, che va dall' uno all' altro di questi punti; i contorni, oppur gl' involuppi, i quali determinano la figura, e l'*estensione* dei corpi; finalmente quest'*estensione* medesima.

Il carattere proprio a questa ultima forma della grandezza è il legame, che si ravvisa tra le sue parti, o la loro *continuità*; laddovechè nel numero si considera solamente quante parti contiene, circostanza, alla quale rapportavasi immediatamente la parola *quantità*, che abbiamo in seguito applicata alla *grandezza* in generale, avvertendo di chiamar *quantità continua* la grandezza considerata sotto la forma *continua*, per distinguerla dal

numero, il quale chiamasi *quantità discreta*, o *discontinua*.

2. Tutto ciò, che concerne la *grandezza*, è l'oggetto della Scienza chiamata *Matematica*; i numeri sono poi specialmente l'oggetto dell' *Aritmetica*.

La *grandezza continua* appartiene alla *Geometria*, la quale si occupa particolarmente delle proprietà, che presentano le forme dei corpi per rapporto all' *estensione*.

3. Il *numero* essendo la collezione di più cose simili, o di più parti distinte, suppone l'esistenza d'una di queste cose, oppur d'una di queste parti, presa per termine di paragone, e che chiamasi allora *unità*.

La maniera più naturale di formar i numeri, è d'unire primieramente un' *unità* con un' altra, poi un' altra ancora con la riunione delle precedenti: continuando in questa maniera compongonsi delle collezioni d' *unità*, che s'esprimono con dei nomi particolari: l'insieme di questi nomi, il quale caugia da un linguaggio ad un altro, compone la *numerazione parlata*.

4. Siccome nulla non limita la *grandezza*, alla quale si può portar il *numero*, poichè è sempre possibile, per quanto grande che sia un *numero*, d'aggiungervi un' *unità* di più, si concepisce ch' esistono un' *infinità* di numeri differenti, e che sarebbe per conseguenza impossibile esprimerli in qualunque linguaggio si fosse con dei numeri isolati, o indipendenti gli uni dagli altri.

Da ciò sono nate le denominazioni, nella quali si è fatto in modo di procurarsi, con le combinazioni d' un piccol numero di parole assoggettate a delle forme regolari, e perciò facili a ritenersi in memoria, un gran numero d' espressioni distinte.

Quelle, che sono in uso nel linguaggio Francese, ricavansi, all' eccezione d' alcune, dai nomi assegnati ai nove primi numeri, e dall' altre espressioni, che prendono in seguito le collezioni di *dieci*, di *cento*, e di *mille unità*.

Infatti le *unità* si contano per

uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, e nove;

Le collezioni di *dieci unità*, oppur le *diecine* per

dieci, venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, novanta ()*;

Le collezioni di dieci diecine, o sivero le *centinaja* si contan coi nomi affetti alle unità. Si dice *cento, dugento, trecento , novecento*.

Le collezioni di dieci centinaja, oppur le *migliaja*, si contano tanto coi nomi affetti ai nove primi ~~numeri~~ *ri*, quanto per diecine, e centinaja; così si dice
mille, duemila, . . . , novemila,
diecimila, ventimila ec.
centomila, dugentomila, ec.

Le collezioni di dieci centinaja di *migliaja*, ovver di mille volte mille portano il nome di *milioni*, e si contano come le *migliaja*.

Le collezioni delle decine di centinaja di milioni, oppur di mille milioni, si chiaman *bilioni* e si contano come i milioni (**).

Ciascuna delle collezioni precedentemente accennate è considerata come formante un'unità d'un ordine di più in più elevato a misura che ci allontaniamo di più dalle unità semplici. Si vede ancora che i nomi di *diecina*, e di *centinajo* si ripetono sempre, e che non se ne sono introdotti dei nuovi, tali come *migliajo, milione, bilione*, se non che di quattro in quattr'ordini solamente. Seguendo questa legge, ai *bilioni* si fan succedere i *trilioni, quadrilioni, quintilioni*, ec., i quali hanno, come i *bilioni*, le loro diecine, e le lor centinaja.

I numeri così espressi, allorchè entra più d'una parola nella loro enunciazione, si trovano decomposti

(*) Per rendere regolare questa parte di *nomenclatura*, bisognerebbe, come lo ha proposto *Condorcet*, *sostituire* le parole *unante* e *duante* alle parole *dieci* e *venti*, e *sostituire*; così come usasi ancora in molte parti della *Francia*, alle denominazioni composte, *soixante et dix*, *quatre-vingt*, et *quatre-vingt-dix* le parole *septante*, *octante*, e *nonante*. È a proposito l'osservare che i primi son l'avanzo d'un'antica maniera di contar per ventine, e dietro la quale dicevasi *six-vingt* per esprimere il numero *centoventi*.

(**) I *bilioni* si chiaman *migliardi* nei calcoli di Finanza.

in più collezioni, o sìvvero in più ordini d'unità indicate quì sopra; per esempio, il numero espresso da *cinque cento mila trecento due* trovasi decomposto in tre parti, le quali sono *cinque centinaja di migliaja, tre centinaja d'unità semplici, e due di quest'ultime unità.*

5. La lunghezza dell'espressioni tutte letterali dei numeri: allorchè dessi sono un po' grandi ha fatto immaginar dei caratteri esclusivamente affetti alla loro rappresentazion compendiosa; e da ciò ha avut' origine l'arte di scrivere i numeri col mezzo di questi caratteri, che si chiamano: *cifre*, ovvero la *numerazione scritta.*

Quella, ch'è in oggi adottata, procede presso a poco in una maniera analoga alla numerazione parlata. Primieramente i nove primi numeri vi sono rappresentati ciascuno mediante un carattere particolare, cioè,

1 2 3 4 5 6 7 8 9

uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove.

Quando un numero è composto di diecine e d'unità, si scrivono successivamente da sinistra a destra le diecine, e le unità coi caratteri, da cui questi numeri sono rappresentati. Il numero *quarantasette*, per esempio scrivesi 47; la prima cifra a sinistra 4 indica le quattro diecine, ed ha in conseguenza un valore dieci volte maggior di quello, che avrebbe, se dessa fosse stata sola; mentrechè la cifra 7 posta alla destra, esprimente le sette unità, non ha che il valore, che le è stato dato sin da principio.

Vedesi nel numero *trentatre*, il quale scrivesi 33, la cifra 3 ripetuta due volte, ma con dei valori diversi: la prima a sinistra ha un valore dieci volte maggiore di quella, ch'è alla sua destra.

Quest'è il principio fondamentale della nostra numerazione scritta.

Se si volesse esprimere *cinquanta*, oppure cinque diecine, siccome non vi sono nessuna unità in questo numero, altro non dovrebbe scriversi che la cifra 5, e bisognerebbe in conseguenza indicar con un segno particolare che nell'espressione del numero questa cifra deve occupare il primo posto a sinistra; per que-

s'ò porremo alla sua destra il carattere o , ovvero lo zero, il quale non ha per se stesso alcun valore, e non serve se non a riempire il posto delle collezioni d' unità, le quali mancano nell' enunciazione del numero proposto, e si avrebbe 50.

6. Con dieci caratteri solamente, e con la convenzione stabilita pocanzi sul valore, che le cifre prendon dal posto, che desse occupano, si perviene ad esprimere tutti i numeri possibili.

Con due cifre si possono scrivere i numeri sino a nove diecine e nove unità, il che forma 99, oppure *novantanove*. Dopo di questo numero viene il centinajo, il quale s'esprime con la cifra 1 avanzata d'un posto di più verso la sinistra di quel che non lo sarebbe se dessa esprimesse delle diecine; e per questo si pongon due zeri alla sua destra, il che fa 100.

Le unità e le diecine, che aggiungeremo in seguito per formare i numeri superiori a 100, prenderanno il posto, che loro è proprio; così *centuno* si scriverà in cifre 101, *centundici* si scriverà 111. Si vede in questo numero la medesima cifra ripetuta tre volte con differenti valori. Nel primo posto, a contar dalla destra, ella esprime un' unità, nel secondo una decina, nel terzo un centinajo. Lo stesso è riguardo ai numeri 222, 333, 444, ec. Così, per una conseguenza della convenzione stabilita precedentemente a riguardo delle diecine, e delle unità, *una medesima cifra esprime delle unità di dieci in dieci volte maggiori a misura che dessa si avvanza dalla destra verso la sinistra, e diviene per un semplice cangiamento di posto capace a rappresentar successivamente le diverse collezioni d' unità, le quali posson entrare nell'espressione d' un numero.*

7. Scrivesi dunque un numero sotto la dettatura, o dietro al suo enunciato, ponendo successivamente allato le une dell' altre, principiando dalla sinistra, le cifre le quali esprimono i numeri d' unità di ciascuna collezione; ma bisogna aver presente alla mente l'ordine, in cui si succedono queste collezioni, per non ometterne alcuna, e riempire con degli zeri i posti vuoti di quelle, che mancano nell' enunciato del

numero, che dee scriversi. Se questo fosse, per esempio, *trecentoventiquattromilanovecentoquattro*, porrebbesi 3 per le centinaja di migliaia, 2 per le venti migliaia o due decine di migliaia, 4 per le migliaia, 9 per le centinaja; e siccome immediatamente dopo delle centinaja vengono le diecine, le quali mancano nel numero proposto, metterebbesi o per occuparne il luogo, dipoi porrebbesi la cifra 4 delle unità: si avrebbe in tal maniera 324904.

Parimente, coll' avvertenza di riempire per mezzo di zeri posti delle diecine di migliaia, delle migliaia, e delle diecine, le quali mancano nel numero *cinquecentomilatrecentodue*, scriveremo 500302.

8. Allorchè un numero è scritto in cifre, per enunciarlo, o tradurlo nel linguaggio ordinario, è mestieri sostituire a ciascuna delle cifre la frase, che la medesima rappresenta, e dietro al posto, che occupa questa cifra, indicare, o pronunziare la collezione, alla quale appartengono le sue unità. Ciò sarà reso chiaro dall' esempio seguente.

2	4	8	9	7	3	2	1	5	8	0	3	4	6
diecine di triloni	triloni.	centinaja di bilioni	diecine di bilioni	bilioni.	centinaja di milioni	diecine di milioni	milione.	centinaja di migliaia	diecine di migliaia	migliaia.	centinaja	diecine	unità

Le cifre di questo numero son divise con delle virgole in gruppi, o *membri*, di tre in tre cominciando dalla destra; ma l'ultimo membro a sinistra, che nell' esempio attuale non ha che due cifre, potrà qualche volta non averne che una sola. Ciascuno di questi membri corrisponde alle collezioni indicate dalle parole *unità*, *migliaja*, *milione*, *bilione*, *trilione*, e le sue cifre n' esprimono successivamente le unità,

le diecine , e le centinaja. Si forma in conseguenza l'espressione tutta in lettere del numero proposto enunciando ciascun membro come se desso fosse solo , ed aggiungendo dopo delle sue unità il nome , che le medesime portano :

Nell'esempio di sopra si legge : *ventiquattro trilion, ottocentonovantasette bilioni, trecentoventuno milioni, cinquecentottantamila trecentoquarantasei unità.*

9. I numeri posson considerarsi in due diverse maniere , cioè , nel modo che ho di già fatto , non particolarizzando niente la specie di cosa o d'unità , alla quale essi si rapportano , ed allora si chiamano *numeri astratti* ; ovvero accennando la specie delle loro unità , come quando si dice *due uomini* , *cinque anni* , *tre ore* , ec. , e questi sono allora dei *numeri concreti*.

È evidente che la formazione dei numeri mediante la riunione successiva delle unità non dipende punto dalla natura di queste unità , e che lo stesso succede riguardo a tutte le proprietà , che risultano dalla medesima formazione , dietro le quali s'arriva a comporre , e decomporre i numeri gli uni per gli altri , il che dicesi calcolare. Vado dunque ad esporre le principali regole del calcolo dei numeri , senz'aver riguardo alla natura delle loro unità.

Dell'Addizione.

10. Quest'operazione , la quale ha per fine di riunir più numeri in un solo , non è che un compendio della formazione dei numeri mediante la riunione successiva delle unità. Se , per esempio , a sette si volesse aggiungere cinque , farebbe di mestieri , nella serie dei nomi *uno , due , tre , quattro , cinque , sei , sette , otto* , ec. assegnati ai numeri alzarsi di cinque gradi al di sopra del termine *sette* , ed arriverebbesi allora alla frase *dodici* , la quale corrisponde per conseguenza alla riunione di sette unità con cinque. Sopra di questo metodo son fondate tutte le *addizioni* dei numeri piccoli , e di cui i risultati si sono imparati a memoria. La sua applicazione immediata ai numeri un poco gran-

di sarebbe impraticabile ; ma allora si concepiscono decomposti nelle loro diverse collezioni di unità , per effettuar separatamente la riunione di quelle , le quali portano il medesimo nome. Affine di sommar , per esempio , 27 con 32 , si riuniscono le 7 unità del primo numero colle 2 del secondo , il che fa 9 ; poi le 2 diecine del primo colle 3 del secondo , il che fa cinque diecine. L'insieme di questi due risultati forma un totale di 5 diecine , e 9 unità , o sivvero , 59 il quale esprime la somma dei numeri proposti.

Per quanto grandi sieno i numeri , che bisogna sommare insieme , possiamo applicar loro ciò che abbi- am di già detto ; ma è necessario osservare che le somme parziali , risultanti dall'addizion di due nume- ri espressi da una sola cifra , possono spesso produrre delle diecine , o delle unità della collezione superiore e che debbono in conseguenza esser riunite con quel- le di questa tal collezione.

Nell'addizione dei numeri 49 , e 78 la somma del- le unità 9 e 8 ne produce 17 , delle quali bisogna ri- tenere 10 , o sivvero una diecina , per unirla alla somma delle diecine dei numeri proposti. Direm dun- que 4 , e 7 fanno 11 , ed unendovi la diecina ritenu- ta avremo 12 per il totale delle diecine contenute nel- la somma di questi numeri , la quale conterrà in con- seguenza 1 centinajo , 2 diecine , e 7 unità ; il che farà 127.

11. Partendo da questi principii abbiamo trovata una maniera di disporre i numeri da sommarsi, la qua- le facilita la riunione delle loro diverse collezioni d' unità , ed abbi- am formata una regola , che l' esem- pio seguente farà sufficientemente conoscere.

Sieno i numeri 527 , 2519 , 9812 , 73 , e 8 : per sommarli insieme , si comincia da scriverli gli uni sot- to gli altri , ponendo le unità del medesim' ordine in una colonna medesima ; poi si tira una linea per se- pararli dal risultato , il quale si pone al disotto.

$$\begin{array}{r}
 527 \\
 2519 \\
 9812 \\
 73 \\
 8 \\
 \hline
 \end{array}$$

Somma. 12939

Si fa primieramente la somma dei numeri contenuti nella colonna delle unità, e siccome si trova 29, non si scrivono che le 9 unità, e si ritengono le 2 diecine per unirle a quelle, che son contenute nella colonna seguente, la quale mediante quest'accrescimento, contiene 13 unità del suo ordine, non si scrivono neppur adesso al disotto che le 3 unità, e si ritien la diecina per unirla alla colonna seguente. S'opera sopra questa come sulla precedente, e si trova 19; non si scrivono parimente che le 9 unità, e si ritien la diecina per la colonna seguente, la cui somma è allora composta di 12 unità; si scrivono le 2 unità sotto questa colonna, e si pone la diecina alla sinistra, il che riducesi a scriver la somma dell'ultima colonna tale come l'abbiamo trovata. Ottenghiamo con questo mezzo 12939 per la somma dei numeri proposti.

12. Il metodo, che abbiám seguito, può enunciarsi sì come appresso: *scrivere i numeri da sommarsi gli uni sotto gli altri, e ponendo le loro unità dell'istesso ordine in una colonna medesima, tirare una linea sotto l'ultimo numero per separarlo dal risultato; sommar successivamente, cominciando dalla destra, i numeri contenuti in ciascuna colonna; se la somma non sorpassa 9, scriverla tale come l'abbiamo trovata, e se dessa contiene delle diecine, ritenerle per unirle alla colonna seguente: finalmente all'ultima colonna scriver la somma trovata.*

Potremo esercitarci sopra gli esempj seguenti:

7861	66947	4649
345	46742	928
8023	132684	9298
16229	246373	14875

Della sottrazione

13. Dopo d'aver imparato a comporre un numero coll'addizione di più altri, il primo Problema, che si presenta, è quello di togliere un numero da un altro, il qual lo sorpassi, ovvero, ciò ch'è lo stesso, di decomporre quest'ultimo in due parti, una delle quali sia l'altro numero dato. Se s'avesse, per esempio, il numero 9, e che si fosse voluto togliere 4, si direbbe, per questa operazione, decomposto il detto numero in due parti, le quali lo riprodurrebbero coll'addizione.

Per arrivare a toglier un numero da un altro allorchè dessi non sono considerabili: bisogna seguire un metodo opposto a quello, che abbiamo prescritto nel principio del n. 10 per trovare la loro somma, e vale a dire, che nella serie dei nomi assegnati ai numeri si dee, a partir dal maggiore di quelli che si considerano, discender di tanti gradi quante unità vi son nel più piccolo, ed arriveremo al nome appartenente alla differenza cercata: in questa maniera discendendo di quattro gradi al disotto del nome *nove*, arrivasi a *cinque*; nome che esprime il numero, che bisogna aggiungere a 4 per formar 9, oppure che indica di quanto il 9 sorpassa 4.

Sotto quest'ultimo punto di vista 5 è l'eccesso di 9 su 4. Se non si voless'altro che indicare l'ineguaglianza dei numeri 9, e 4, e senza fissar l'attenzione sull'ordine delle loro grandezze, direbbesi che la loro differenza è 5. Finalmente, se si facesse l'operazione per toglier 4 da 9, direbbesi che il resto è 5. Si fa manifesto che, sebben sinouine le parole *resto*, *eccesso*, *differenza*, corrispondon ciascuna ad una maniera speciale di riguardare la decomposizione del numero 9 nelle due parti 4, e 5; operazione, che s'indica sempre col nome di *sottrazione*.

14. Allorchè si tratta di numeri un poco grandi, la sottrazione si opera per parti, togliendo successivamente dalle unità di ciascun ordine, espresse nel maggior dei due numeri, quelle degli ordini corrispondenti espresse nel minore. Per farla comodamente, si

dispongono questi numeri come 9587, e 345 nell'esempio seguente.

$$\begin{array}{r} 9587 \\ 345 \\ \hline \end{array}$$

Resto . . 9242

e si pone al disotto di ciascuna colonna l'eccesso del numero superiore sul numero inferiore contenuto in essa colonna, dicendo

$$\begin{array}{l} 5 \text{ tolto da } 7, \text{ resta } 2, \\ 4 \text{ tolto da } 8, \text{ resta } 4, \\ 3 \text{ tolto da } 5, \text{ resta } 2, \end{array}$$

e ponendo in seguito la cifra 9, da cui non v'è nulla da togliere; il resto 9242 esprime di quanto 9587 sorpassa 345.

L'esattezza del metodo, che abbiám seguito, è incontrastabile; poichè, togliendo dal maggior de' due numeri tutte le parti contenute nel minore, abbiamo evidentemente tolto tutto questo minore.

15. L'applicazione di questo metodo richiede certe attenzioni particolari allorchè alcuni degli ordini di unità del numero da togliersi ne contengono più che gli ordini corrispondenti dell'altro numero.

Se si ha, per esempio, 397 da togliersi da 524

$$\begin{array}{r} 524 \\ 397 \\ \hline \end{array}$$

Resto . . . 127

Nell'operazione indicata di sopra non potrem togliere immediatamente le unità del numero inferiore da quelle del numero superiore; ma il numero 524, rappresentato quì da 5 centinaia, 2 decine, e 4 unità, può esser espresso in un modo diverso decomponendo alcune delle collezioni di unità, che desso contiene, per riunirne una parte con altre d'un ordine inferiore. In vece delle 2 decine, e 4 unità, che

lo terminano, possiamo sostituirvi col pensiero una decina, e 14 unità: togliendo allora da quest'ultime le 7 unità del numero inferiore, scriveremo al disotto il resto 7. Mediante questa nuova decomposizione, il numero superiore non contien altro che una decina, dalla quale non si potrebbe in conseguenza togliere le 9 del numero inferiore; ma delle 5 centinaia, espresse nel numero superiore, possiamo prenderne 1 per unirla alla decina restante, ed avremo allora 4 centinaia, e 11 decine; togliendo da queste quelle del numero inferiore, ne resteranno 2. Finalmente toglierem dalle 4 centinaia restate nel numero superiore le 3 del numero inferiore; scriveremo il resto 1: ed avremo il resto 127 per il risultato dell'operazione proposta.

Questa maniera d'operare consiste, come si vede, nel prendere in prestito dall'ordine superiore un'unità per unirla, secondo il di lei valore, a quelle dell'ordine, sul quale s'opera, osservando in seguito di contare per un'unità di meno la cifra superiore allorchè vi arriveremo.

16. Quando mancano degli ordini di unità nel maggior de' due numeri; e vale a dire, mentre vi son degli zeri tra le sue cifre significative, bisogna andare fino alla prima di queste cifre a sinistra per poter conseguirne l'imprestito convenevole. Eccone un esempio:

$$\begin{array}{r} 7002 \\ 3495 \\ \hline \end{array}$$

Resto. . . . 3507

Non potendo toglier le 5 unità del numero inferiore dalle 2 del numero superiore, si prendono 10 unità dalle 7000 espresse dalla cifra 7, ne restano allora 6990; ed unendo le 10 prime alla cifra 2, il numero superiore si trova decomposto in 6990, e 12; togliendo da quest'ultimo numero le 5 unità del numero inferiore avremo 7 per le unità del resto.

Questa prima operazione ha lasciato nel numero superiore 6990 unità, oppure 699 decine, in vece di 700, le quali son espresse dalle tre ultime cifre a

sinistra; il che rimpiazza per conseguenza i due zeri con dei 9, e diminuisce di un' unità la prima cifra significativa a sinistra. Continuando sopra questo piede la sottrazione nell' altre colonne, dessa non soffre alcuna difficoltà, e si trova il resto scritto al disotto dell' esempio.

17. Riepilogando le osservazioni, che abbiamo fatte nei due numeri precedenti, la regola da seguirsi per operare la sottrazione su due numeri qualunque può essere enunciata così: *porre il minor numero sotto il maggiore in modo che le loro unità del medesimo ordine siano in una colonna medesima; tirare una retta sotto il minor numero per separarlo dal risultato; toglier successivamente in ciascuna colonna, cominciando dalla destra, il numero inferiore dal numero superiore; se ciò non è possibile, aumentare la cifra superiore di 10 unità; considerare la prima cifra significativa; la quale vien dopo di questa, per un unità di meno, e se vi son degli zeri intermedj, riguardarli come dei 9.*

18. Si può, per maggiore facilità, allorchè bisognerà diminuire la cifra superiore d' un' unità, considerarla per il suo valore, ed unire quest' unità alla cifra inferiore corrispondente, la quale trovandosi aumentata, conduce, così come debb' essere, ad un resto minore d' un' unità di quel che risulterebbe dalle cifre scritte. Nel primo degli esempi qui sotto notati, dopo d' aver tolte 6 unità da 14, considereremo la cifra 8 inferiore per un 9, e così degli altri.

16844	103034	49812002
9786	69845	18924983
7058	33189	30887019

*Della Riprova dell' Addizione,
e della Sottrazione.*

19. Effettuando un' operazione secondo un metodo, la cui legittimità è stabilita su principj sicuri, si possono nulladimeno commettere alcuni errori nelle addi-

zioni, o sottrazioni parziali, di cui cercasi il risultato, colla nostra memoria: affine di prevenir quest'inconveniente, abbiám ricorso ad un'operazione inversa della precedente, mediante la quale riconoscesi se i risultati di quest'ultima sono esatti: questo è ciò, che dicesi far la *riprova* dell'operazione proposta.

Quella dell'addizione consiste nel togliere successivamente dalla somma dei numeri aggiunti tutte le parti di questi numeri; e se l'operazione è stata ben fatta, non si dee trovare alcun resto. Vado a mostrare sull' esempio del n.º 11 come si effettuano nel medesimo tempo tutte le sottrazioni.

$$\begin{array}{r} 527 \\ 2519 \\ 9812 \\ 73 \\ 8 \\ \hline \end{array}$$

Somma . . 12939
1120

Si sommano primieramente i numeri contenuti nella prima colonna a sinistra, la quale quivi contiene delle migliaja, e se ne toglie la somma 11 dal numero 12, col quale principia il risultato. Si scrive al disotto la differenza 1, prodotta da ciò che abbiám ritenuto sulla colonna delle centinaja nell'operazione primitiva. La somma della colonna delle centinaja, presa isolatamente, non ascende che a 18; se si toglie dalle 9 centinaja scritte nel risultato, ed unite al mille, che proviene dalla colonna precedente a sinistra, e considerato come dieci centinaja, il resto 1 scritto al disotto esprimerà pure ciò che abbiám ritenuto sulla colonna delle decine. La somma 11 di quest'ultima tolta da 13, lascia per resto 2 decine provenienti da ciò che abbiám ritenuto sulla colonna delle unità. Unendo queste 2 decine alle 9 unità espresse nel risultato, si forma il numero 29, il quale debb'esser precisamente la somma della colonna dell'unità, sulla quale alcun'altra non vi ha potuto

influire; sommando dunque di nuovo i numeri contenuti in questa colonna, dobbiam pure, se l'operazione è stata ben fatta, arrivare al medesimo risultato, e non avere in conseguenza, niun resto. Questo è ciò, che difatto succede nell'esempio attuale, e che vien indicato dallo o scritto sotto di questa colonna. Il metodo, che abbiamo spiegato, restringesi a questo: *per far la riprova dell'addizione, bisogna sommar di nuovo principiando dalla sinistra, ciascuna delle colonne dell'operazione; toglier la somma ottenuta in ultimo luogo da quella, ch'è espressa al di sotto, scrivere i resti, che trovansi, ed unirli come tante decine alla colonna seguente a destra: se l'operazione è stata ben fatta, non dee restar niente nell'ultima colonna.*

20. La riprova della sottrazione ricavasi immediatamente da ciò, che il minor numero unito col resto compone il maggiore. Così, per assicurarsi dell'esattezza della sottrazione seguente,

$$\begin{array}{r}
 624 \\
 297 \\
 \hline
 \text{Resto} \dots 227 \\
 524
 \end{array}$$

abbiam aggiunto al resto il minor numero, ed il risultato si è trovato infatti eguale al maggiore.

Della Moltiplicazione

21. Allorchè i numeri da sommarsi tra loro son eguali, l'addizione prende il nome di *moltiplicazione*, perchè la somma è allora composta d'uno di questi numeri ripetuto tante volte quanti sono i numeri da sommarsi: reciprocamente, se si vuol ripetere un numero più volte, v'arriveremo sommando questo numero con se medesimo altrettante volte quant'esso debb'essere ripetuto men una. Per esempio, coll'addizione seguente

16

16

16

16

 64

si ripete il numero 16 quattro volte, e si trova sommato tre volte con se medesimo.

Ripetere un numero 2 volte vuol dire *raddoppiarlo*; 3 volte vuol dir *triplicarlo*; 4 volte vuol dir *quadruplicarlo*; e così di seguito.

22. Una moltiplicazione contiene tre numeri, cioè, quello che si ripete, e che si chiama *moltiplicando*; il numero che indica quante volte si ripete, e che chiamasi *moltiplicatore*; finalmente il risultato dell'operazione, che si chiama *prodotto*. Il *moltiplicando*, e il *moltiplicatore*, considerati come concorrenti entrambi a formare il *prodotto*, son chiamati *fattori* di questo *prodotto*. Nell'esempio suddivisato, 16 è il *moltiplicando*, 4 il *moltiplicatore*, e 64 il *prodotto*; e rendesi chiaro che 4, e 16 sono i *fattori* di 64.

23. Allorchè il *moltiplicando*, e il *moltiplicatore* sono numeri grandi, la formazione del *prodotto* mediante l'addizione ripetuta del *moltiplicando* richiederebbe un tempo considerabilissimo; abbiamo in conseguenza cercato di compendiarla decomponendola in certo numero d'operazioni parziali, facili ad eseguirsi a memoria. Ripeterebbesi, per esempio, 4 volte il numero 16, prendendo separatamente il medesimo numero di volte le 6 unità, e la decina, da cui vien composto: serve dunque conoscere i prodotti, che somministrano i numeri d'unità di ciascun ordine del *moltiplicando* per il *moltiplicatore*, allorchè quest'ultimo numero non ha che una sola cifra; e ciò riducesi, per tutti i casi possibili, a trovare il *prodotto* d'uno qualunque dei 9 primi numeri per qualunque altro di questi numeri.

24. Questi prodotti son contenuti nella Tavola seguente attribuita a *Pitagora*.

TAVOLA DI PITAGORA

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

25. Per formare questa *Tavola*, si scrivono primieramente sopra una medesima linea i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Si somma quindi ciascuno di questi numeri con se stesso, e si scrivon le somme sulla seconda linea, la quale si trova composta allora del doppio di ciascun numero della prima, ovvero del prodotto di questo numero per 2.

Si sommano parimente con ciascuno dei numeri della seconda linea quelli, che lor corrispondono nella prima, e si dispongono le somme sopra una terza linea la quale contiene perciò il triplo di ciascuno dei numeri della prima, o sivero i loro prodotti per 3. Mediante l'addizione dei numeri della prima linea con quelli della terza ne formeremo una quarta, la quale conterrà il quadruplo di ciascun numero della prima.

ovvero i prodotti di questi numeri moltiplicati per 4: e così di seguito fino a tanto che non siamo arrivati alla nona linea, la quale contiene i prodotti dei numeri della prima moltiplicati ciascuno per 9.

È a proposito d'osservare che i diversi prodotti d'un numero qualunque pei numeri 2, 3, 4, 5, ec. si chiamano i *multipli* di questo numero: così 6, 9, 12, 15, ec. sono i multipli di 3.

26. Quando si è ben concepita la formazione di questa Tavola, è facil conoscerne l'uso. Difatto, se dimandisi, per esempio, il prodotto di 7 per 5, bisognerà nella quinta linea, la quale contiene i diversi prodotti dei nove primi numeri moltiplicati per 5, prender quello, che corrisponde al disotto di 7; troveremo così 35: sarebbe lo stesso per qualunque altro esempio; *il prodotto si troverebbe nella linea del moltiplicatore al disotto del moltiplicando.*

27. Cercando nella Tavola di Pitagora il prodotto di 5 per 7, troveremo ancora come qui sopra 35, benchè siasi questa volta considerato 5 come il moltiplicando, e 7 come il moltiplicatore. Quest'osservazione, la qual può ripetersi sopra ciascun dei prodotti contenuti nella Tavola è generale: *e possiamo sempre in qualunque siasi moltiplicazione, rovesciar l'ordine dei fattori, vale a dire, prendere il moltiplicatore per moltiplicando, ed il moltiplicando per moltiplicatore.*

Siccome la Tavola di Pitagora non contiene che un numero limitato di prodotti, non servirà d'aver verificata in questa Tavola la conclusione enunciata di sopra; poichè potrebbe dubitare ch'essa non fosse vera per dei prodotti maggiori, il cui numero è illimitato: non v'è che un ragionamento indipendente da qualunque valore particolare del moltiplicando, e del moltiplicatore, che dimostrar possa che la conclusione, di cui si tratta, non soffre alcuna eccezione. Eccone uno tanto più proprio a soddisfare a tal fine, perchè offre un'immagin sensibile della maniera, colla quale si forma il prodotto di due numeri. Per farlo comprender meglio, io l'applicherò primieramente ai numeri 5, e 3.

Si si scriva sopra una medesima linea 5 volte la cifra 1, e si pongano due linee simili al disotto della prima; come si vede qui appresso :

1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1,

il numero totale delle cifre 1 sarà composto di tante volte 5 quante sono le linee, e vale a dire di 3 volte 5; ma, per la disposizione di queste linee, le cifre 1 son disposte in colonne, le quali ne contengono 3; contandole in questa maniera si trova tante volte 3 unità quante son le colonne, ovvero 5 volte 3 unità, ed il prodotto non dipendendo punto dalla maniera di contare, ne segue che 3 volte 5, e 5 volte 3 danno il medesimo prodotto. Questo ragionamento è facile a estendersi su dei numeri qualunque, considerando che ciascuna linea contiene tante unità quante ve ne son nel moltiplicando, e che abbiám posto, le une sotto dell' altre; un numero di linee eguale al moltiplicatore. Contando allora il prodotto per mezzo delle linee, desso risulta dal moltiplicando ripetuto tante volte quante unità vi son nel moltiplicatore; ma l'insieme delle cifre scritte presenta tante colonne quante unità vi sono in una linea, e ciascuna colonna contiene tante unità quante sono le linee: se dunque si vuol contar per colonne, ripeteremo il numero delle linee, oppure il moltiplicatore, tante volte quante unità sono in una linea, e vale a dire tante volte quante l' esprime il moltiplicando. È dunque in conseguenza permesso, nella formazione del prodotto di due numeri qualunque sianzi, di prendere per moltiplicatore quello di questi numeri, che vorremo.

28. Il ragionamento da me or riportato per dimostrare la verità della Proposizion precedente n'è la *dimostrazione*; e bisogna osservar bene che ciò, che costituisce l' essenza del metodo seguitato nelle *Matematiche pure*, egli è che non ammettesi alcuna proposizione, o alcuna operazione, che non sia la conseguenza necessaria delle prime nozioni, sulle quali ci siamo appoggiati, o di cui la verità non sia stabilita

in generale dietro a dei ragionamenti indipendenti dagli esempj particolari, che non possono giammai servir di dimostrazione, e non servono che a facilitare al Lettore l'intelligenza dei ragionamenti, ovvero la pratica delle regole.

29. Conoscendo tutti i prodotti, che somministrano i 9 primi numeri combinati tra loro, si può secondo ciò, che abbiamo osservato nel n.º 23, moltiplicare un numero qualunque per un altro d'una sola cifra, formando successivamente il prodotto delle unità di ciascun ordine del moltiplicando per il moltiplicatore; e l'operazione si dispone nella maniera seguente.

$$\begin{array}{r}
 526 \\
 \times 7 \\
 \hline
 3682
 \end{array}$$

Il prodotto delle unità 6 del moltiplicando per il moltiplicatore 7 essendo 42, non si scrivono che le 2 unità, e ritengono le 4 decine per unirle a quelle, che troveremo in appresso.

Il prodotto delle decine 2 del moltiplicando per il moltiplicatore 7 è 14, ed unendovi le 4 decine ritenute precedentemente, si forma il numero 18, del qual non si scrivono parimente se non che le unità, ritenendo la diecina per l'operazione seguente.

Il prodotto delle centinaia 5 del moltiplicando per il moltiplicatore 7 è 35; aumentatolo di ciò che abbiain ritenuto precedentemente, divien 36, e si scrive tutto intero, perchè non vi sono altre cifre nel moltiplicando.

30. Questo metodo s'enuncia così. *Afin di moltiplicare un numero composto di più cifre per un numero d'una sola, si pone il moltiplicatore sotto le unità del moltiplicando, si tira una linea al di sotto di questo numero, per separarla dal prodotto; si moltiplican successivamente, cominciando dalla destra, le unità di ciascun ordine del moltiplicando per il moltiplicatore; si scrive il prodotto tutto intero allorchè non passa 9; ma, se desso contiene delle decine, si ritengono per unirle al prodotto*

seguinte; e si continua in questo maniera fino all'ultima cifra a sinistra del moltiplicando, della quale se ne scrive il risultato tal quale come si trova.

È manifesto che quando il moltiplicando sia terminato da degli o, l'operazione non dee cominciare se non che alla prima cifra significativa di questo numero; ma per dare al prodotto il valore, che debbe averè è necessario porre alla sua destra tanti o, quanti se ne trovano a quella del moltiplicando. A riguardo delli o, i quali fossero posti tralle cifre del moltiplicando, essi non danno nessun prodotto, e si dee in conseguenza porre uno o allorchè non avrem ritenuto nulla del prodotto precedente.

Ecco degli esempi per esercitare il Lettore.

$\begin{array}{r} 956 \\ 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 8200 \\ 9 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 7012 \\ 5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 80970 \\ 4 \\ \hline \end{array}$
5736	73800	35060	323880

31. I numeri più semplici, espressi da più cifre, essendo 10, 100, 1000, ec, bisogna primieramente cercare come si possa moltiplicare per ciascun di questi numeri un altro numero qualunque. Ora rammentandosi la convenzion stabilita nel n.º 6, dietro alla quale una stessa cifra acquista un valore di 10 in 10 volte maggiore a misura che dessa s'avanza verso la sinistra, intenderemo, che affin di moltiplicare un numero qualunque per 10, bisogna rendere dieci volte maggiore ciascuna delle collezioni d'unità, di cui esso è composto, e vale a dire, cangiar le unità in decine, le decine in centinaia, e così di seguito, e che si ottien quest'effetto ponendo uno o alla destra del numero proposto, poichè tutte le sue cifre significative si troveranno avanzate d'un posto verso la sinistra.

In virtù della stessa ragione moltiplicheressesi un numero qualunque per 100 ponendo alla sua destra due zeri; perocchè mediante il primo zero il numero divenendo dieci volte maggiore di quel che non era in principio, diverrebbe pure dieci volte maggiore per il secondo zero, e sarebbe per conseguenza 10 volte 10,

ovvero 100 volte maggiore di quel ch'egli lo fosse in primo luogo.

Continuando questi ragionamenti vedremo che, secondo il nostro sistema di numerazione, si moltiplica un numero per 10, 100, e 1000, ec. scrivendo alla destra del moltiplicando tanti zeri quanti ve ne sono nel moltiplicatore alla destra dell'unità.

32. Allorchè la cifra significativa del moltiplicatore è diversa dall'unità, e che trattisi, per esempio, di moltiplicare per 30, o per 300, o per 3000, i quali numeri non sono altra cosa che 10 volte 3, o 100 volte 3, o 1000 volte 3, ec. l'operazione si scompone in due altre; si moltiplica in primo luogo per la cifra significativa 3, secondo la regola del n.º 30, ed in seguito moltiplicasi il prodotto per 10, 100, ovvero 1000, ec. (come l'abbiam detto nel n.º precedente) scrivendo uno, due, tre zeri alla destra di questo prodotto.

Sia, per esempio 764 da moltiplicarsi per 300

$$\begin{array}{r} 764 \\ 300 \\ \hline \end{array}$$

Prodotto . . . 229200

Le 4 cifre significative di questo prodotto risultano dalla moltiplicazione di 764 per 5; si scrivono due posti indietro verso la sinistra per porre i due zeri, i quali terminano il moltiplicatore.

In generale, allorchè il moltiplicatore sarà seguito da un numero qualunque di zeri, moltiplicheremo in primo luogo il moltiplicando per la cifra significativa del moltiplicatore, e porremo in seguito del prodotto tanti zeri quanti ve ne sono nel moltiplicatore.

33. Le regole precedenti s'applicano al caso ove il moltiplicator sia qualunque, considerando a parte ciascuna delle collezioni d'unità, di cui esso è composto. Moltiplicar, per esempio, 793 per 345, ovvero, ciò che riducesi allo stesso, ripetere 345 volte il numero 793, vuol dire prender 793, 5 volte, più 40 volte più 300 volte cosicchè l'operazione da farsi trovasi de-

composta in tre altre, nelle quali i moltiplicatori 5, 40, e 300 non hanno che una cifra significativa.

Per riunir facilmente il risultato di queste tre operazioni, si dispone il calcolo nel modo seguente.

$$\begin{array}{r}
 793 \\
 345 \\
 \hline
 3965 \\
 31720 \\
 237900 \\
 \hline
 273585
 \end{array}$$

Si moltiplica successivamente il moltiplicando per le unità, le diecine, le centinaja, ec, del moltiplicatore, osservando di porre un zero alla destra del prodotto parziale dato dalle diecine del moltiplicatore, e due zeri alla destra del prodotto dato dalle centinaja; il che fa avanzare il primo di questi prodotti d'un posto verso la sinistra, ed il secondo di due. Si fa in seguito la somma dei tre prodotti parziali per ottenere il prodotto totale dei numeri dati.

Gli zeri posti in seguito dei prodotti parziali non contando per nulla in questa somma, possiamo dispensarci da scriverli, purchè s'abbia cura di mettere al posto, ch'essa debbe occupare, la prima cifra del prodotto dato da ciascuna cifra significativa del moltiplicatore, e vale a dire, al posto delle diecine il prodotto dato dalle diecine del moltiplicatore, al posto delle centinaja del moltiplicatore, e così di seguito.

34. Dietro a ciò, che precede, s'annuncia così la seguente regola. *Per moltiplicare due numeri qualunque l'uno per l'altro, si formano successivamente (secondo la regola del n.° 30) i prodotti del moltiplicando pei diversi ordini di unità del moltiplicatore, osservando di porre la prima cifra di ciascun prodotto parziale sotto le unità dell'ordine, di cui è la cifra del moltiplicatore, che dà questo prodotto, e si sommano in seguito tutti i prodotti parziali.*

35. Allorchè il moltiplicando è terminato da degli zeri, si possono da principio trascurar questi, e cominciare tutte le moltiplicazioni parziali dalla prima cifra significativa del moltiplicando; ma, per porre in seguito al posto, che loro conviene, le cifre del prodotto totale, bisogna scrivere alla destra di questo prodotto tanti zeri quanti ve n'erano alla destra del moltiplicando.

Se il moltiplicatore fosse terminato da uno, o più zeri, l'osservazione del n.º 32 permetterebbe di trascurare ancor questi, purchè se ne scrivesse un egual numero alla destra del prodotto.

Resulta da ciò che *quando il moltiplicando, ed il moltiplicatore son terminati da degli zeri, non dobbiamo occuparci in principio che delle cifre significative, e si pongono alla destra del prodotto ottenuto, dopo di queste cifre, tanti zeri quanti ve n'erano sì nel moltiplicando che nel moltiplicatore.*

Allorchè vi son degli zeri tra le cifre significative del moltiplicatore, siccome dessi non danno alcun prodotto, si trascurano, osservando di mettere nel posto, che loro conviene, le unità del prodotto risultante dalla cifra significativa scritta alla sinistra di questi zeri.

Il Lettore potrà esercitarsi su questi esempj.

300	526	9648
40	307	5137
12000	3682	67536
	157800	289440
	161482	964800
		48240000
		49561776

Della Divisione.

36. Il prodotto di due numeri essendo formato da uno di questi numeri ripetuto tante volte quante unità vi sono nell'altro (21); possiam ritornare da un prodotto

qualunque ad uno de' suoi fattori, cercando quante volte questo prodotto contien l'altro suo fattore; la sottrazione sola è bastante per questa ricerca. Difatto, se si volesse sapere quante volte il 64 contiene il 16 altro non si dovrebbe fare che toglier 16 da 64, tante volte quante è possibile; e siccome dopo quattro sottrazioni non resterebbe nulla, se ne concluderebbe che il numero 16 è contenuto 4 volte in 64. Questa maniera di decomporre un numero per un altro, onde saper quante volte desso contiene quest'ultimo chiamasi *divisione*, perchè questa serve a dividere, o a spartire un numero dato in parti eguali, il numero delle quali, o il lorò valore sia dato.

Se s'avesse, per esempio, da dividere 64 in 4 parti eguali; per trovare il valore di queste parti, bisognerebbe cercare il numero, ch'è contenuto 4 volte in 64, ed in conseguenza riguardare 64 come un prodotto, che abbia 4 per uno de' suoi fattori; ed in questo caso una delle parti cercate è 16. Se si dimandasse di quante parti eguali a 16 il numero 64 è composto, bisognerebbe, per conoscere il numero di queste parti, cercar quante volte 64 contien 16, ed in conseguenza dovrebbe riguardare 64 come un prodotto, di cui un de' fattori fosse 16, e l'altro il numero cercato, che in questo caso è 4.

Qualunque siasi perciò quella di questi usi, che l'abbia in vista, la *divisione riducesi a trovare un dei fattori d'un prodotto dato, allorchè si conosce l'altro fattore.*

37. Il numero, che bisogna dividere, chiamasi *dividendo*; il fattore cògnito, e per il quale si dee dividere, si chiama *divisore*; il fattore incognito, il quale trovasi mediante la divisione, si chiama *quoziente*; ed indica sempre quante volte il divisore è contenuto nel dividendo.

Siegue da ciò, che abbiamo detto, che il *divisore moltiplicato per il quoziente dee riprodurre il dividendo.*

38. Allorchè il dividendo può contenere un gran numero di volte il divisore, non è mai praticabile l'impiegare la sottrazione ripetuta per ottenere il quoziente;

fa di mestieri in tal caso ricorrere ad un compendio, analogo a quello che abbiamo dato per la moltiplicazione. Se il dividendo non è 10 volte maggiore del divisore; cosa che può conoscersi dalla sola ispezione di questi numeri, e se il divisore non ha che una sola cifra, troveremo il quoziente col mezzo della Tavola di Pitagora; poichè dessa contiene tutti i prodotti, i di cui fattori non han che una sola cifra. Se si dimandasse, per esempio, quante volte 56 contiene 8, bisognerebbe discendere all' 8. colonna, sino alla linea ove s' trova 56, la cifra 7., posta alla testa di questa linea indica il secondo fattore del numero 56 oppur quante volte questo numero contiene 8.

Si fa manifesto da questa medesima Tavola che vi sono dei numeri, i quali non possono esser divisi esattamente per altri. Per esempio, la settima linea, che contien tutti i multipli di 7, non contenendo il numero 40, risulta che desso non è divisibil per 7; ma, siccom' egli è compreso tra 35, e 42, si vede che il maggior multiplo di 7, ch'esso possa contenere, è 35, i di cui fattori son 5, e 7. Col soccorso di questi elementi, e colle considerazioni, ch' esporrò, adesso, si può effettuare una divisione qualunque.

39. Sia, per esempio, da dividersi 1656 per 3; si può cangiare il Problema in quest' altro. *Trovare un numero tale, che moltiplicando le sue unità, diecine, centinaja, ec. per 3, ottengansi per prodotto le unità, diecine, centinaja, ec. del dividendo 1656.*

È manifesto che questo numero non avrà unità d' un ordine più elevato delle migliaja: poichè, se avesse solamente delle diecine di migliaja, vi sarebbero pure delle diecine di migliaja nel prodotto, e ciò appunto non ha luogo. Non avran luogo neppure le unità dell' ordine nelle migliaja; poichè, se una sola ve ne fosse, il prodotto, ne conterrebbe almen 3; e questo pur non ha luogo.

Ciò dimostra che il migliajo, che trovasi nel dividendo, proviene da ciò, che si ritiene quando si moltiplicano pel divisore 3 le centinaja del quoziente.

Ciò posto, la cifra delle centinaja del quoziente

cercato debb' esser tale, che moltiplicando il numero, ch'essa esprime per, 3 abbiassi per prodotto 16, oppure il multiplo di 3 più prossimo a 16. Questa restrizione è necessaria a motivo di ciò, che abbiam potuto ritenere nella moltiplicazione dell'altre cifre del quoziente pel divisore, e che abbiam dovuto riunire al prodotto delle centinaja.

Il numero, che sodisfa a tal condizione, è 5; ma 5 centinaja moltiplicate per 3 danno 15 centinaja, e il dividendo 1656 ne contien 16; la differenza 1 centinajo provien dunque da ciò, che abbiam ritenuto nella moltiplicazione dell'altre cifre del quoziente pel divisore. Se adesso si toglie il prodotto parziale 15 centinaja, ovvero 1500, dal prodotto totale 1656, il resto 156 conterrà i prodotti delle unità, e delle diecine del quoziente per il divisore; e tutto si ridurrà a trovare un numero, che moltiplicato per 3 dia 156 questione precisamente simile a quella, che s'è presentata in principio. Così, allorchè avremo trovata la prima cifra del quoziente in quest'ultimo, come l'abbiam fatto nell'esempio precedente, moltiplicheremo il numero, ch'essa esprime, pel divisore; e togliendo questo prodotto parziale dal prodotto totale; avremo per risultato un nuovo dividendo sul quale opereremo come sul precedente; e così di seguito sino a tanto che il dividendo primitivo sia del tutto esausto.

40. L'operazion, che ho descritta, disponesi come si vede qui sotto

divid. 1656	3 divis.
15	552 quoz.
—	
15	
15	
—	
06	
6	
—	
0	

Il dividendo, ed il divisore son separati da una linea; se ne tira un'altra sotto il divisore per indicare

il posto del quoziente; ciò fatto, si prende sulla sinistra del dividendo la parte 16, capace di contenere il divisore 3; dividendola per questo numero, si ha 5 per la prima cifra a sinistra del quoziente; formando in seguito il prodotto del divisore per il numero, che abbiain trovato, e togliendo quel prodotto dal dividendo parziale 16, se ne scrive al disotto il resto 1, allato del quale s'abbassano le 5 diecine del dividendo. Considerando quest'ultimo numero come un secondo dividendo parziale, dividesi parimente pel divisore 3, e s'ottiene 5 per la seconda cifra del quoziente; si fa il prodotto di questo numero pel divisore; questo si toglie dal dividendo parziale, e si ha 0 per resto. Abbassasi finalmente l'ultima cifra del dividendo 6, si divide questo terzo dividendo parziale pel divisore 3, e si ha 2 per l'ultima cifra del quoziente.

41. È patente che, se si trovasse un dividendo parziale, che non contenesse il divisore, ciò non potrebbe indicar altro se non che il quoziente non avrà unità dell'ordine di questo dividendo, e che quelle, ch'egli contiene, provengono dai prodotti del divisore per le unità degli ordini inferiori del quoziente: fa di mestieri dunque, quando ciò succede, porre uno 0 nel quoziente per riempire il posto dell'ordine delle unità, il quale manca.

Esempio: sia

$$\begin{array}{r}
 1535 \quad | \quad 5 \\
 \underline{15} \\
 035 \\
 \underline{35} \\
 000
 \end{array}$$

La divisione delle 15 centinaia del dividendo pel divisore 5 non lasciando alcun resto, le diecine 3, le quali formano il secondo dividendo parziale, non possono contenere il divisore. Ne risulta da ciò che il quoziente non debbe avere delle diecine, e che biso-

gna in conseguenza riempirne il posto con uno o, per dare alla prima cifra del quoziente il valore, che dessa dee avere in rapporto alle altre, dipoi abbassando l'ultima cifra del dividendo, si forma un terzo dividendo parziale, il quale diviso per 5, somministra 7 per le unità del quoziente; e questo numero è 307.

42. Le considerazioni esposte nel n. 40 s'applicano egualmente ai casi dove il divisore contiene un numero qualunque di cifre.

Se si trattasse, per esempio di divider 57981 per 251, vedrebbe si facilmente che il quoziente non ha cifre al di là delle centinaia; poichè, s'egli avesse solamente delle migliaia, il dividendo conterrebbe delle centinaia di migliaia, il che non ha luogo: di più, questa cifra delle centinaia debb'esser tale che, moltiplicata per 251, dia per prodotto 579, oppure il multiplo di 251 il più prossimo a 579, ma minore di questo numero: restrizione necessaria a cagione di ciò, che può essere stato ritenuto nella moltiplicazione dell'altre cifre del quoziente pel divisore. Il numero, che verifica questa condizione, è 2; ma due centinaia moltiplicate per 251 fanno 502 centinaia, e il dividendo ne contiene 579: la differenza 77 centinaia provien dunque da ciò, ch'è stato ritenuto nella moltiplicazione delle unità, e decine del quoziente pel divisore.

Se adesso si toglie il prodotto parziale 502 centinaia, oppure 50200 dal prodotto totale 57981, il resto 7781, conterrà i prodotti delle unità, e delle decine del quoziente, per il divisore, e tutto si ridurrà a trovare ancora un numero, il quale, moltiplicato per 251, dia per prodotto 7781. Così, allorché avremo determinata la prima cifra del quoziente, moltiplicheremo il numero, che dessa esprime, pel divisore, e togliendo il prodotto parziale dal prodotto totale, avremo per risultato un nuovo dividendo, sul quale opereremo come sul precedente, e così di seguito, fino a tanto che il dividendo non sia affatto esausto.

In generale bisogna sempre, per ottenere la prima cifra del quoziente, separare sulla sinistra del dividendo

un numero di cifre sufficiente perchè il numero, che desse esprimono, considerato come rappresentante delle unità semplici, possa contenere il divisore, ed effettuarsi questa divisione parziale.

43. Disponendo l'operazione come precedentemente s'è detto, i calcoli, che abbiamo indicati, s'eseguiscono nell'ordin seguente.

$$\begin{array}{r}
 57981 \quad | \quad 251 \\
 502 \quad | \quad \hline
 \hline
 778 \quad | \quad 231 \\
 753 \quad | \quad \hline
 \hline
 251 \quad | \\
 251 \quad | \hline
 \hline
 000
 \end{array}$$

Si prendono le tre prime cifre a sinistra del dividendo, per formare il primo dividendo parziale; questo si divide pel divisore; si scrive nel quoziente il numero 2 che ne risulta; si moltiplica il divisore per questo numero; si scrive il prodotto 502 sotto il dividendo parziale 579. La sottrazione essendo eseguita, allato del resto 77 s'abbassano le diecine 8 del dividendo; si divide questo nuovo dividendo parziale pel divisore; s'ottiene 3 per la seconda cifra del quoziente; si moltiplica il divisore per questo numero. Si toglie il prodotto del dividendo parziale corrispondente, ed a lato del resto 25 abbassasi l'ultima cifra 1 del dividendo: quest'ultimo dividendo parziale 251, essendo eguale al divisore, dà 1 per le unità del quoziente.

44. Allorchè il divisore contiene più cifre, si possono incontrare alcune difficoltà quando si cerca quante volte questo numero è contenuto nei dividendi parziali. L'esempio seguente è destinato per far vedere come vi si possa arrivare.

$$\begin{array}{r}
 423405 \quad | \quad 485 \\
 3880 \quad | \quad 873 \\
 \hline
 3540 \\
 3395 \\
 \hline
 1455 \\
 1455 \\
 \hline
 0000
 \end{array}$$

Bisogna primieramente prendere quattro cifre sulla sinistra del dividendo per formare un numero, che possa contenere il divisore ed allora non si conosce a prima vista quante volte 4234 può contenere 485. Per aiutarci in questa ricerca, osserveremo che questo divisore è compreso tra 400, e 500, e che se desso fosse esattamente l'uno, o l'altro di questi numeri, la quistione sarebbe ridotta a trovar quante volte 4 centinaia, o 5 centinaia son contenute nelle 42 centinaia del numero 4234, ovvero, ciò ch'è lo stesso, quante volte i numeri 4, oppur 5 son contenuti in 42. Abbiamo per il primo 10, e per il secondo 8; dunque il quoziente cercato si trova tra questi due numeri. Primieramente si fa manifesto che non è possibile d'impiegar 10, perchè ciò supporrebbe che le unità dell'ordine superiore alle centinaia del dividendo potessero contenere il divisore; il che non ha luogo: non resta dunque che a vedere qual de' due numeri 9, oppure 8, impiegato come moltiplicatore di 485, dia un prodotto il quale possa togliersi da 4234, e si trova che questo è 8: questa è dunque la prima cifra del quoziente. Togliendo dal dividendo parziale il prodotto del divisore moltiplicato per 8, si ha per resto 354; abbassando in seguito lo 0 delle decine del dividendo, si forma un secondo dividendo parziale, sul quale si opera come sul precedente; e così degli altri.

45. L'epilogo degli articoli precedenti ci offre questa regola. *Affin di dividere un numero per un altro, si pone il divisore alla destra del dividendo; questi*

due numeri si separano con una linea: e se ne tira un'altra sotto il divisore, per segnare il luogo del quoziente. Si prendon sulla sinistra del dividendo tante cifre quante ne son necessarie per contenere il divisore; si cerca quante volte il numero espresso dalla prima cifra del divisore sia contenuto in quello, ch'è rappresentato dalla prima, o dalle due prime cifre del dividendo parziale; si moltiplica questo quoziente, il quale non è che approssimativo, pel divisore; e se il prodotto è maggiore del dividendo parziale, si tolgon successivamente tante unità dal quoziente quante ne son necessarie per ottenere un prodotto, il qual possa togliersi dal dividendo parziale: si fa quindi la sottrazione, e se il resto fosse maggiore del divisore, ciò sarebbe allora una prova che il quoziente è stato troppo diminuito, ed in conseguenza s'aumenterebbe. Allato del resto, s'abbassa la cifra seguente del dividendo; si cerca, come precedentemente, quante volte questo dividendo parziale contiene il divisore; si scrive nel quoziente il numero trovato il quale si moltiplica pel divisore, onde togliere il prodotto dal dividendo parziale; si continua così fino a tanto che non siano state abbassate tutte le cifre del dividendo proposto. Allorchè s'incontra un dividendo parziale, che non contenga il divisore, bisogna, prima d'abbassare una nuova cifra del dividendo, porre uno zero nel quoziente.

46. Si restringano in un minore spazio le operazioni: ch' esige la divisione effettuando a memoria la sottrazione dei prodotti del divisore per ciascuna cifra del quoziente, come vedremo nell' esempio seguente,

$$\begin{array}{r}
 1755 \overline{) 68325} \\
 \underline{39} \\
 195 \\
 \underline{156} \\
 390 \\
 \underline{36} \\
 300 \\
 \underline{270} \\
 300 \\
 \underline{270} \\
 300
 \end{array}$$

Dopo d'aver trovato che il primo dividendo parziale 175 contiene 4 volte il divisore 39, si moltiplica primieramente queste 4 unità per 4, il che dà 36; e per toglier questo prodotto dalle unità del dividendo parziale, si aggiungono alle 6 unità, che desso non tie-

ne, 4 diecine il che fa 45, da cui togliendo 36, resta 9. Si ritengono dipoi le 4 diecine per unirle mentalmente al prodotto 12 del quoziente per le diecine del divisore, il che fa 16, e togliendolo da 17, si vengono a togliere le 4 diecine, delle quali s'erano aumentate le unità del dividendo per render possibile la sottrazione precedente. S'opera nella stessa maniera sul secondo dividendo parziale 195, dicendo: 5 moltiplicato per 9 fa 45, che tolto da 45 resta zero; poi 5 moltiplicato per 3 fa 15; con le 4 diecine, che sono state ritenute, fa 19 che tolto da 19 resta zero.

Si fa sufficientemente chiaro da ciò come dovrem contenerci in qualunque altro esempio, per complicato esso fosse.

47. La divisione s'abbrevia ancora allorchè il dividendo, ed il divisore son terminati da più zeri, perchè se ne posson sopprimere alla fine di ciascuno di questi numeri tanti quanti ve ne sono in quello, che ne contien meno.

Se s'avesse, per esempio 84000 da dividere per 400, si ridurrebbero questi numeri a 840 ed a 4: il quoziente non sarebbe alterato; perchè altro non si sarebbe fatto che cangiare il nome delle unità, poichè in luogo di 84000, oppure di 840 centinaja, e di 400, ovvero di 4 centinaja, averebbersi 840 unità; e 4 unità ed il quoziente dei numeri 840, e 4 resta sempre lo stesso qualunque sia la specie delle loro unità.

Bisogna pure osservare che supprimendo due zeri alla fine dei numeri proposti, gli abbiain divisi nel medesimo tempo ambedue per 100; poichè segue dal n. 31 che scancellando 1, oppure 2, o sivero 3 zeri alla destra d'un numero qualunque, lo dividiamo per 10, oppure per 100, ovvero per 1000; e così di seguito.

Ecco alcuni esempj di divisione:

144 3	16512 344	3049164 6274
24	2752	53956
00 48	0000 48	37644 486
—	-----	00000
		3

48. La divisione, e la moltiplicazione si servono scambievolmente di prova, come la sottrazione, e la addizione; poichè, dietro alla definizione della divisione (36), si dee, dividendo un prodotto per uno dei suoi fattori trovar l'altro fattore, e moltiplicando il divisore per il quoziente, si dee riprodurre il dividendo (37).

Delle Frazioni.

49. La divisione non può sempre effettuarsi esattamente, perchè un numero qualunque d'unità non si compone d'un altro numero qualunque d'unità preso un certo numero di volte. N'abbiamo di già veduti degli esempj nelle Tavole di Pitagora la quale non contien che i prodotti dei nove primi numeri, moltiplicati due a due, e che non contien tutti i numeri compresi tra 1, e 81, il primo, cioè, e l'ultimo di quelli, che vi si trovano iscritti. Il metodo esposto qui sopra non conduce allora che a trovare il maggior multiplo del divisore, che possa contenere il dividendo.

Se si dividesse 239 per 8, seguendo la regola del numero 46,

$$\begin{array}{r|l} 239 & 8 \\ 79 & \hline 7 & 29 \end{array}$$

come lo dimostra l'operazione di sopra, averebbesi, per ultimo dividendo parziale il numero 79, il qual non contiene 8 esattamente, ma che cadendo tra i numeri 72 e 80, di cui uno contiene 9 volte, e l'altro 10 volte il divisore 8, fa vedere che l'ultima parte del quoziente è maggiore di 9, e minore di 10, e che in conseguenza il quoziente totale cade tra 29, e 30. Moltiplicando dunque la cifra 9 delle unità del quoziente pel divisore 8, e togliendo il prodotto dall'ultimo dividendo parziale 79, il resto 7 sarà evidentemente l'eccesso del dividendo 239 sul prodotto dei fattori 29, e 8. Difatto, avendo colle diverse parti dell'operazione tolto successivamente dal dividendo 239 il prodotto di ciascuna cifra del quo-

ziente pel divisore , abbiamo evidentemente sottratto il prodotto del quoziente intero pel divisore , ovvero 232 ; ed il resto 7 , minore del divisore , prova che 232 è il maggior multiplo di 8 , che possa esser contenuto in 239.

50. È ben rammentarsi che dietro a ciò, che abbi-
am detto, per riprodurre un dividendo qualunque,
fa di mestieri aggiungere al prodotto del divisore per
il quoziente il resto, che la divisione ha lasciato al-
lorchè dessa non si è potuta eseguire esattamente.

51. Se si volesse realmente dividere in otto parti
eguali una grandezza, di specie qualunque, compo-
sta di 239 unità, ciò non potrebbe farsi senza porvi
delle porzioni d'unità cioè delle *frazioni*. Difatto,
allorchè si fossero tolte dal numero 239 le 8 volte
29 unità, ch'esso contiene, resterebbero 7 unità da
dividersi in 8 parti: per arrivare a ciò, si potreb-
ber dividere, l'una dopo dell'altra, tutte queste uni-
tà in 8 parti; poi prendere una parte sopra ciascuna
unità, il che somministrerebbe 7 parti, le quali do-
vrebber essere unite alle 29 unità intere, per formar
l'ottava parte di 239, o sia il quoziente esatto della
divisione di questo numero per 8.

Lo stesso ragionamento potrebbe farsi sopra qua-
lunque altra divisione, che conducesse ad un resto;
ed in questo caso il quoziente si compone di due par-
ti: l'una è formata d'unità intere, mentre che l'al-
tra non può ottenersi se non se dopo che s'è effe-
tuata realmente la divisione delle unità concrete, o
materiali del resto in un numero di parti indicato dal
divisore: per adesso non si fa che indicarla dicendo,
*che bisogna concepir l'unità del dividendo divisa
in tante di queste parti quante unità vi sono nel
resto, per compire il quoziente cercato.*

52. In generale, allorchè abbi-
am voluto considerare delle quantità minori della unità, è bisognato
per rapportarle a questa unità, concepirla divisa in
un certo numero di parti tanto piccole da poter esse-
re contenute un certo numero di volte in queste quan-
tità, ossia, *misurarle*. Nell'idea, che ci siamo così
formata della loro grandezza, vi son dunque entrati

due elementi ; cioè , quante volte le parti , che le misurano , son contenute nell' unità , ed il numero ch' esse ne contengono.

S' è composta per le frazioni una nomenclatura , la qual corrisponde alla maniera di concepirle , e rappresentarle.

Quelle , che risultano dalla divisione dell' unità in 2 parti eguali , si chiamano *mezzi*,

in 3 parti	<i>terzi</i>
in 4 parti	<i>quarti</i>
in 5 parti	<i>quinti</i>
in 6 parti	<i>sesti</i>
in 11 parti	<i>undicesimi</i>
in 12 parti	<i>dodicesimi</i>

e così di seguito , aggiungendo la desinenza *esimi* al numero , ch' esprime quante parti si concepiscono nell' unità :

Qualunque frazione s' esprime allora con due parole : la prima , che fa conoscere di quante parti d' essa è composta , si chiama *numeratore* ; e la seconda , che indica quante di queste parti son necessarie per formar l' unità , si chiama *denominatore*, perchè se ne deduce la denominazione della frazione. *I cinque sestì dell' unità sono una frazione , di cui il numeratore è 5 , ed il denominatore è 6.*

Il *numeratore* ed il *denominatore* si chiamano insieme i due *termini* della frazione.

Ci serviamo delle cifre per abbreviar l'espressione delle frazioni , scrivendo il denominatore sotto del numeratore separati l' uno dall' altro da una linea.

un terzo si scrive $\frac{1}{3}$
cinque sestì . . . $\frac{5}{6}$

53. Dietro all' idea , che si annette alle parole *numeratore* , e *denominatore* , è evidente che s' aumenta una frazione aumentando il suo numeratore senza cangiare il suo denominatore ; poichè quest' ultimo esprimendo in quante parti l' unità è divisa , fissa la grandezza di queste parti , la quale resta la stessa

fin tantochè il denominatore non cangia; ed aumentando il numeratore, si aumenta il numero delle parti contenute nella frazione, ed in conseguenza questa frazione. Così,

per esempio, $\frac{8}{9}$ sorpassano $\frac{7}{9}$, e $\frac{13}{30}$ sorpassano $\frac{11}{30}$.

Segue evidentemente da questa considerazione che ripetendo il numeratore 2, 3, o un numero qualunque di volte, e restando lo stesso il suo denominatore, si ripete un egual numero di volte la quantità rappresentata dalla frazione, oppure d'essa si trova moltiplicata per questo numero; poichè questa frazione componesi allora di 2, 3, oppure d'un numero qualunque di volte di tante parti quante essa ne conteneva da principio, e queste parti son restate le medesime. La

frazione $\frac{3}{5}$ è dunque il triplo di $\frac{1}{5}$, e $\frac{10}{21}$ il doppio di $\frac{5}{21}$.

Si diminuisce una frazione diminuendo il suo numeratore, senza cangiare il suo denominatore; poichè si prende per comporla un minor numero di parti di quello ch'essa ne conteneva da principio, e queste parti hanno conservato la medesima grandezza; Dunque, se si divide per 2, 3, ovvero per un numero qualunque, il numeratore d'una frazione, senza cangiare il suo denominatore, d'essa si rende un egual numero di volte minore, oppure essa si trova divisa per questo numero; poichè questa riducesi a contenere 2, 3, oppure un numero qualunque di volte meno parti di quel che essa ne conteneva da principio, e queste parti son restate le medesime. Così

$\frac{1}{5}$ è il terzo di $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{21}$ son la metà di $\frac{10}{21}$.

54. Al contrario, si diminuisce una frazione allorchè si aumenta il suo denominatore, senza cangiare il suo numeratore; poichè allora si concepiscono più parti nella unità; desse divengon dunque più piccole; e siccome non se ne prende che lo stesso numero per formar la frazione, il loro insieme compone nel secondo caso una quantità minor che nel primo.

In tal maniera $\frac{2}{5}$ son meno di $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{13}$ meno di $\frac{4}{9}$.

Segue da ciò che, se si moltiplica per 2, 3, ovvero per un numero qualunque, il denominatore d'una frazione, senza cangiare il suo numeratore, la frazione diviene un egual numero di volte più piccola, ovvero si trova divisa per questo numero; poichè dessa si compone sempre di tante parti quante ne conteneva da principio, ma ciascuna è divenuta 2, 3, oppure un numero qualunque di volte minore. La

frazione $\frac{3}{8}$ è la metà di $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{15}$ è il terzo di $\frac{5}{5}$.

Si aumenta una frazione allorchè si diminuisce il suo denominatore, senza cangiare il suo numeratore; poichè, siccome si concepiscono allora meno parti nella unità, ciascuna di queste divien maggiore, ed il loro insieme pure diventa maggiore.

Dunque, se si divide il denominatore d'una frazione per 2, 3, ovvero per un numero qualunque, si rende questa frazione un simil numero di volte maggiore che per l'avanti, oppure dessa si trova moltiplicata per questo numero; poichè questa si compone sempre del medesimo numero di parti, ma divenuta ciascuna di queste 2, 3, oppure un numero qualunque di volte maggiore di quel che desso non lo erano in principio. In conseguenza di ciò

$\frac{3}{5}$ sono il triplo di $\frac{3}{15}$, $\frac{5}{6}$ sono il quadruplo di $\frac{5}{24}$.

È a proposito d'osservare che sopprimere il denominatore d'una frazione è lo stesso che moltiplicarla per questo numero. Sopprimere, per esempio,

il denominatore 3 nella frazione $\frac{2}{3}$ vuol dir cangiarla in due interi, oppure moltiplicarla per 3.

55. Si posson riepilogare nel modo, che segue, le precedenti proposizioni:

Moltiplicando	}	il numeratore	}	si moltiplica	}	la fra-
Dividendo				si divide		
Moltiplicando	}	il denominatore	}	si divide	}	la fra-
Dividendo				si moltiplica		

56. La prima conseguenza, che dobbiam ricavar da questa Tavola, si è che le operazioni fatte sul denominatore producono sulla quantità rappresentata dalla frazione l'effetto delle operazioni *contrarie*, od *inverse*. Ne risulta ancora che, *se si moltiplicano simultaneamente il numeratore, e il denominatore d'una frazione per il medesimo numero, la frazione non cangerà di valore*; poichè se da un lato, moltiplicando il numeratore, si rende la frazione 2, 3, ec. volte maggiore che per l'avanti, dall'altro, per la seconda operazione, se ne prende la metà, il terzo, ec.: in una parola, si divide la frazione per il medesimo numero, pel quale si era in primo luogo moltiplicata. Così $\frac{1}{5}$ è eguale a $\frac{3}{15}$, e $\frac{5}{21}$ son eguali a $\frac{10}{42}$.

57. Vedesi parimente che, *se si dividono simultaneamente per il medesimo numero il denominatore, e il numeratore d'una frazione, il suo valore non cangia*; poichè, se da un lato dividendo il numeratore si rende la frazione 2, 3, ec. volte minore che per l'avanti, dall'altro, mediante la seconda operazione, se ne prende il doppio, il triplo, ec.: in una parola, dessa si moltiplica per un medesimo numero; pel quale si era in principio divisa. Così la frazione $\frac{2}{4}$ è eguale a $\frac{1}{2}$, e $\frac{3}{9}$ è eguale a $\frac{1}{3}$.

58. Non succede nelle frazioni come nei numeri interi, nei quali una grandezza, s'intantocchè dessa, si rapporta alla medesima unità, non è capace che d'una sola espressione; nelle frazioni al contrario, la medesima grandezza può essere espressa in un infinità di maniere. Per esempio, tutte le frazioni.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \text{ ec.,}$$

il denominator delle quali contiene due volte il numeratore, esprimono, sotto diverse forme, la metà dell'unità. Le frazioni.

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \text{ ec.,}$$

il denominatore delle quali contiene 3 volte il numeratore, rappresentano tutte il terzo dell'unità. Ma tra tutte le forme, che prende, nell'uno e nell'altro esempio, la frazione proposta, la prima è la più notevole, come essendo la più semplice; ed è bene in conseguenza il saperla ritrovare in ciascuna dell'altre: ora questo è quello appunto, a cui si perviene dividendo i due termini di queste per il medesimo numero, il che come lo abbiamo veduto, non ne cangia il valore. Difatto

se si dividon per 7 i due termini della frazione $\frac{7}{14}$ ricaderemo sopra $\frac{1}{2}$; facendo pure la medesima operazione sulla frazione $\frac{7}{21}$, ne dedurremo $\frac{1}{3}$.

59. Seguendo quest'ultimo metodo, si riduce una frazione alla sua *espressione più semplice*. Desso non può applicarsi che alle frazioni, di cui il numeratore, e il denominatore si trovano divisibili per il medesimo numero; e, in tutti gli altri casi, la frazione proposta è la più semplice di tutte quelle, che posson rappresentare la quantità, ch'essa esprime.

Così le frazioni

$$\frac{5}{7}, \frac{7}{12}, \frac{15}{16},$$

di cui i termini non posson esser divisi per un medesimo numero, ovvero non hanno alcun divisore comune fuori di 1, sono *irriducibili*; e non potrebbero per conseguenza esprimere in una maniera più semplice le grandezze, ch'esse rappresentano.

60. Segue di ciò che, affine di semplicizzare una frazione, bisogna tentar di dividere i suoi due termini per alcuno dei numeri 2; 3, ec.; ma mediante questi tentativi non arriverem sempre alla più semplice espressione della frazione proposta, oppure bisognerà almeno il più spesso effettuare un gran numero d'operazioni

Se s'avesse, per esempio, la frazione $\frac{24}{84}$, si potrebbe osservare in primo luogo che ciascun de'suoi

termini è un multiplo di 2, e dividendoli per questo numero; si otterrebbe $\frac{12}{42}$; dividendo in seguito per 2 i due termini di quest'ultima, se ne dedurrebbe $\frac{6}{21}$.

Benchè digià molto più semplice della proposta, questa frazione è ancora capace di riduzione; poichè si posson dividere i suoi due termini per 3, e s'ottiene allora $\frac{2}{7}$.

Se si fa attenzione che dividere un numero per 2, poi dividere il quoziente per 2, poi ancora questo nuovo quoziente per 3, è la medesima cosa che divider subito il numero primitivo per il prodotto de' numeri 2, 2, e 3, che vuol dir 12, vedremo che le tre operazioni suddivisate possono effettuarsi in una sola volta, dividendo i due termini della frazione proposta per 12;

ed avremo egualmente $\frac{2}{7}$.

I numeri 2, 3, 4, e 12, dividendo ciascuno nel medesimo tempo i due numeri 24, e 84, sono i divisori comuni di questi numeri; ma il 12 si distingue dagli altri, perchè desso è il massimo: ed impiegando questo *massimo comun divisore* dei due termini della frazione proposta, dessa riducesi immediatamente alla sua più semplice espressione. È dunque una ricerca utile quella, che segue: *essendo dati due numeri, trovare il loro massimo comun divisore*.

61. Arrivasi alla cognizione del comun divisore di due numeri mediante una specie di tentativo facile a scoprirsi, e che ha il vantaggio di avvicinarci al fine in ciascun passo che facciasi. Per spiegarlo chiaramente, prenderò un esempio.

Siano i due numeri 637, e 143. Il massimo comun divisore di tali numeri non può evidentemente eccedere il minore de' due: convien dunque tentare se il numero 143, ch'è divisor di se stesso, e dà per quoziente 1, può dividere pure il numero 637, nel qual caso sarebbe egli stesso il massimo comun divi-

sore cercato : ma nell' esempio proposto ciò non accade e si trova un quoziente 4, ed un resto eguale a 65.

Adesso egli è manifesto che qualunque divisor comune ai due numeri 637, e 143 dee dividere ancora il resto 65 della lor divisione ; poichè il maggior 637 è eguale al minore 143 moltiplicato per il quoziente 4 più il resto 65 (5o) : ora , dividendolo 637 pel divisore comune cercato , avremo un quoziente esatto; bisogna dunque che se n'abbia pure uno simile dividendo per il medesimo divisore ciascuna delle parti nelle quali 637 è decomposto , e riunendone i risultati , ma il prodotto di 143 per 4 dividesi necessariamente per il divisor comune , il quale è fattore di 143 : bisogna dunque che l' altra parte 65 sia pure divisibile per questo divisore , senza di che il quoziente totale sarebbe un intero accompagnato da una frazione , e non potrebbe in conseguenza eguagliare il numero intero risultante dalla divisione di 637 pel comun divisore.

Reciprocamente qualunque divisore comune a 65 e a 143 dividerà il 637 , composto di 4 volte il 143 più il 65.

Collo stesso ragionamento si proverà in generale che ogni divisore comune a due numeri dee dividere il resto della divisione del maggiore dei due pel minore ; e che qualunque divisore comune a questo minor numero , ed al resto dee dividere il maggiore.

Dietro a questo principio si vede che il massimo comun divisore dei numeri 637, e 143 debb' esserlo pure dei numeri 145, e 65 e che quello di questi ultimi debb' esserlo di 637 e di 143 : ma il 65 non potendo esser diviso per un numero maggior di sè stesso, bisogna dunque provar prima questo. Dividendo 143 per 65 , si trova un quoziente 2 , e un resto 13 ; 65 non è dunque il divisore cercato. Con un ragionamento simile a quello , che si è fatto riguardo ai numeri 637 , 143 , e per il resto 65 della lor divisione , si vedrà che ogni divisore comune di 143 , e di 65 debb' esserlo pure dei numeri 65 , e 13 ; ora il massimo comun divisore di questi ultimi non può superar 13 ; bisogna dunque tentare se 13 divide 65 , il che accade , poichè si ha per quoziente 5.

Dunque 13 è il massimo comun divisore cercato; poichè essendo il massimo comun divisore di sè medesimo e di 65, debbe esserlo di 65 e di 143, e che essendolo di questi numeri debbe esserlo di 143 e di 637.

È comodo in pratica di porre le divisioni successive in seguito le une dell'altre, e di disporre l'operazione come si vede qui sotto:

637	143	65	13
65	4	2	5
	13	0	

separando i quozienti 4, 2, 5 da' resti scritti al di sotto.

I ragionamenti impiegati nell'esempio precedente, poteudo applicarsi a de' numeri qualunque, conducono a questa regola generale: *Si troverà il massimo comun divisore di due numeri dividendo il maggiore di questi numeri per il minore; dividendo quindi il minore per il resto della prima divisione; poi dividendo questo resto per quello della seconda divisione; poi dividendo questo secondo resto per il terzo resto, ossia per quello della terza divisione; e continuando così a dividere il resto di ciascuna operazione per quello della seguente, finchè si giunga a un quoziente esatto; l'ultimo divisore sarà il massimo comun divisore cercato.*

62. Ecco due esempj di quest'operazione:

9024	3760	1504	752
1504	2	2	2
	752	000	

752 è dunque il massimo comun divisore di 9024, e 3760

937	47	44	3	2	1
467	19	1	14	1	2
44	3	14	1	0	

Si vede da quest'ultima operazione che il *massimo comun divisore* di 937, e 47 è solamente 1, cioè che propriamente parlando questi due numeri non hanno divisore comune, poichè tutti i numeri interi, qualunque essi sieno, sono tutti divisibili per 1.

Non è difficile di convincersi che la regola del num.^o precedente dee necessariamente condurre a questo risultato tutte le volte che i numeri proposti non avranno divisore comune; poichè i resti essendo sempre minori del divisore, divengono di mano in mano più piccoli a ciascuna operazione; ed è chiaro che le divisioni si continueranno finchè avremo un divisore maggiore dell'unità.

63. Col mezzo di questi calcoli, le frazioni $\frac{143,3760}{637,9024}$ si riducono subito alla lor più semplice espressione, dividendo i due termini della prima per il loro divisore comune 13, e quelli della seconda per il loro divisore comune 752; così si ottiene $\frac{11,5}{49,12}$. In quanto alla frazione $\frac{47}{937}$, dessa è assolutamente irriducibile, poichè i suoi due termini non hanno altro divisore comune che l'unità.

64. Non è sempre necessario tentar la ricerca del massimo comun divisore de' due termini della frazione proposta; vi sono, come abbiám fatto osservare di sopra, delle riduzioni, le quali si offrono da loro medesime.

Qualunque numero terminato da una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8 è necessariamente divisibile per 2; poichè, siccome dividendo un numero qualunque per 2, non può restar che 1 sulle diecine, l'ultima divisione parziale si effettuerà su i numeri 0, 2, 4, 6, 8, se le diecine non han lasciato resto, oppure su i numeri 10, 12, 14, 16, 18, se desse n' hanno lasciato: e tutti questi numeri son divisibili per 2.

I numeri divisibili per 2 s'chiamano *numeri pari*, perchè dessi posson esser divisi in due parti eguali.

Parimente qualunque numero terminato verso la

destra da un zero, oppure da un 5, è divisibile per 5; poichè, allorchando saremo arrivati alla divisione delle decine per 5, il resto, se v'è, sarà necessariamente 1, 2, 3, oppure 4. diecine; di maniera che, se l'ultima cifra è uno 0, oppure un 5, l'operazione si terminerà sopra uno dei numeri 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, tutti divisibili per 5.

I numeri 10, 100, 1000, ec. espressi dall'unità seguita da un qualunque numero di zeri, possono essere decomposti in 9 più 1, 99 più 1, 999 più 1, e così di seguito; ed i numeri 9, 99, 999, ec. essendo divisibili per 3, e per 9, segue da ciò che, se si dividon per 3, o per 9 i numeri della forma 10, 100, 1000, ec., il resto della divisione sarà 1.

Adesso un numero, che, come 20, 300, 5000, è espresso da una sola cifra significativa, seguita, verso la destra, da un qualsisia numero di zeri, può essere decomposto in più numeri espressi dall'unità seguita verso la destra da un certo numero di zeri; 20 è eguale a 10 più 10; 300 a 100 più 100 più 100; 5000 a 1000 più 1000 più 1000 più 1000; e così degli altri. Segue da ciò che, se si divide 20, oppure 10 più 10, per 3, o per 9, il resto sarà 1 più 1, ovvero 2; se si divide 300, oppure 100 più 100 più 100 per 3, o per 9, il resto sarà 1 più 1 più 1 ovvero 3.

In generale, se si decompone nella stessa maniera un numero espresso da una sola cifra significativa seguita verso la destra da qualunque numero di zeri, affin di dividersi per 3, oppure per 9, il resto di questa divisione sarà eguale a tante volte 1 quante unità vi sono nella cifra significativa, e vale a dire, sarà eguale alla cifra significativa medesima. Ora un numero qualunque siasi essendo decomposto in unità diecine, centinaia, si trova formato della riunione di più numeri espressi da una sola cifra significativa; e se divide ciascuno di questi ultimi per 3, oppure per 9, avremo per resto una delle cifre significative del numero proposto: per esempio, la divisione delle centinaia, darà per resto la cifra delle centinaia, la divisione delle diecine la cifra delle diecine, e così dell'altre. Se dunque la somma di tutti

questi resti fosse divisibile per 3, o per 9, la divisione del numero proposto per 3, o per 9 potrebbe farsi esattamente; dal che ne segue, che, se la somma delle cifre d'un numero è divisibile per 3, o per 9, anco questo numero è divisibile per 3, o per 9.

Così i numeri 423, 4251, 15342 son divisibili per 3, perchè la somma delle cifre significative è 9 nel primo, 12 nel secondo, e 15 nel terzo.

Parimente 621, 8280, 934218 son divisibili per 9 poichè la somma delle cifre significative è 9 nel primo, 18 nel secondo, e 27 nel terzo.

Osserveremo che qualunque numero divisibile per 9 è ancora divisibile per 3, benchè qualunque numero divisibile per 3 non lo sia ancora per 9.

Si potrebbero fare altresì sopra diversi altri numeri osservazioni analoghe a quelle, che ho esposte sopra 2, 3, 5, e 9; ma la ricerca di queste proprietà troppo mi allontanerebbe dal mio assunto per non trattenermivi.

I numeri 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ec., i quali non posson esser divisi che per loro medesimi, o per l'unità, si chiamano *numeri primi*. Due numeri, come 12, e 35, che hanno, ciascuno in particolare dei divisori, ma di cui ciascuno non è comune all'uno, ed all'altro, si dicono *primi tra loro* (*).

Una frazione irriducibile ha inconseguenza per numeratore, e per denominatore dei numeri primi tra di loro.

65. La somma e la sottrazione non hanno alcuna difficoltà quando le frazioni, sulle quali dobbiamo effettuare quest'ultime operazioni, hanno lo stesso denominatore; siccome desse non contengono che delle parti della stessa denominazione, ed in conseguenza della grandezza medesima, possiam sommarle oppur sottrarle nella stessa maniera come se fossero delle unità, osservando d'indicare nel risultato la denominazione delle parti, di cui esso è composto.

(*) Vedremo nel num. 162 come bisogni contenersi per decomporre un numero nei suoi fattori semplici o *primi*.

È evidente di fatto che $\frac{2}{11}$ e $\frac{3}{11}$ fanno $\frac{5}{11}$, nello stesso modo che 2 quantità e tre quantità della medesima specie ne fanno 5 di questa specie, qualunque essa siasi.

Parimente, la differenza tra $\frac{3}{9}$, e $\frac{8}{9}$ è $\frac{5}{9}$, nello stesso modo che la differenza tra 3 quantità, e 8 quantità della medesima specie sono 5 quantità di questa specie, qualunque essa siasi.

Dobbiam concluder da ciò che, *per sommare o sottrarre frazioni del medesimo denominatore, bisogna prender la somma, oppure la differenza dei loro numeratori, e dare al risultato il denominatore comune.*

66. La somma delle frazioni conduce spesso a risultati, i quali sorpassano l'unità. Se si sommassero, per esempio, $\frac{4}{8}$ e $\frac{7}{8}$, la somma sarebbe $\frac{11}{8}$; quest' espressione designando vi parti, otto delle quali riunite compongono l'unità, equivale all'unità più tre ottavi d'unità, oppure a $1\frac{3}{8}$.

In generale qualunque espressione frazionaria, il cui numeratore sorpassa il denominatore, contiene delle unità ovvero degli interi, e si estraggono gl'interi dividendo il numeratore pel denominatore: il quoziente somministra il loro numero; ed il resto posto in frazione è quello, che gli dee accompagnare.

Per esempio, l'espressione $\frac{307}{53}$, denotando 307 parti, 53 delle quali compongono l'unità, vi sono nella quantità, che rappresenta questa espressione, tante unità quante sono le volte che 307 contiene 53: facendo la divisione, si ottiene 5 per quoziente e 42 per resto; questi 42 sono dei cinquantatreesimi d'unità: così, in $\frac{307}{53}$, può scriversi $5\frac{42}{53}$.

67. L'espressione $5\frac{42}{53}$, nella quale gl'interi son

manifesti, essendo composta di due parti differenti, egli è spesso utile di ritornare all'espressione primiti-

va³⁰⁷ ; quest' è ciò che dicesi *ridurre un intero in*
⁵³
frazione.

Affine di pervenirvi, *fa di mestieri moltiplicare l'intero pel denominatore della frazione, che lo accompagna, aggiungere il suo numeratore al risultato, e dare alla somma il denominatore della frazione medesima.*

In fatti è necessario in primo luogo convertire i cinque interi in cinquanta-treesimi, locchè si effettuerà moltiplicando 53 per 5 ; poichè ciascuna unità dee contenere cinquantatre parti ; il risultato sarà $\frac{265}{53}$:

riunendo questa parte colla seconda $\frac{42}{53}$, otterremo $\frac{307}{53}$.

68. Quando le frazioni proposte hanno dei denominatori diversi, non si possono allora sommare insieme, oppure sottrarre l'uno dall'altro i numeri delle parti, di cui dessi sono composti ; poichè queste parti son di differenti grandezze, e, per ovviare a quest' inconveniente, abbiám fatto subire a queste frazioni una trasformazione, la quale le riduce a parti della grandezza medesima dando loro un denominatore comune

Sian, per esempio, le frazioni $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$; se si moltiplichino per 5, denominatore della seconda, i due termini della prima, convertirem questa prima in $\frac{10}{15}$, di poi moltiplicando per 3, denominator della prima, i due termini della seconda, convertiremo questa seconda in $\frac{12}{15}$: formeremo in tal modo due nuove espressioni, le quali avranno lo stesso valore delle due frazioni proposte (56).

Quest' operazione necessaria per paragonar le gran-

dezze rispettive di due fazioni non consiste, in sostanza, che nel trovar, per esprimerle, delle parti di unità tanto piccole, onde poter essere contenute esattamente in ciascuna di quelle, di cui si forman le frazioni proposte. E' manifesto, nell'esempio suddivisato, che la quindicesima parte dell'unità può misurare esattamente $\frac{1}{3}$, e $\frac{1}{5}$ di quest'unità, poichè $\frac{1}{3}$

contiene cinque 15, ^{esimi} $\frac{1}{5}$ ne contiene tre. Il metodo applicato alle frazioni $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$ riescirebbe egualmente sopr'altre frazioni, qualunque si fossero.

In generale, per ridurre allo stesso denominatore due frazioni qualunque, fa di mestieri moltiplicare i due termini di ciascuna pel denominatore dell'altra.

69. Si riduce simultaneamente al medesimo denominatore un numero qualunque di frazioni moltiplicando i due termini di ciascuna per il prodotto dei denominatori di tutte l'altre; poichè egli è manifesto che i nuovi denominatori sono gli stessi, perchè ciascuno è formato dal prodotto di tutti i denominatori primitivi; e che le nuove frazioni son del valore medesimo delle prime: imperciocchè altro non si è fatto che moltiplicare i due termini di questa per un medesimo numero (56).

La regola precedente conduce, in tutti i casi, al fine, che ci siamo proposti: ma allorchè i denominatori delle frazioni, di cui si tratta, non sono primi tra loro, esiste un denominator comune più semplice di quello, che dà la predetta regola; e vi si giunge mediante delle considerazioni analoghe a quelle dei numeri antecedenti. Se s'avessero, per esempio, le frazioni.

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8},$$

siccome non trattasi, per ridurle al medesimo denominatore, che di dividere l'unità in parti tali, che

sian contenute esattamente in quelle, di cui queste frazioni si formano, servirà di trovare il più piccolo numero, che possa dividersi esattamente per ciascun dei lor denominatori 3, 4, 6, 8; e lo scopriremo tentando sopra i multipli di 3 le divisioni per 4, 6, e 8, le quali non riescono in primo luogo che su 24: ciò fatto, altro non resterà che convertir le frazioni proposte in 24esimi dell' unità.

Per effettuar quest' operazione, cercheremo successivamente quante volte i denominatori 3, 4, 6, e 8 son contenuti in 24; ed i quozienti saranno i numeri, pei quali bisognerà moltiplicar rispettivamente i due termini di ciascuna frazione, onde ridurla al denominatore 24. Troveremo in tal maniera, che i

due termini della frazione $\frac{2}{3}$ debbon essere moltipli-

cati per 8, quelli di $\frac{3}{4}$ per 6, quelli di $\frac{5}{6}$ per 4,

quelli di $\frac{7}{8}$ per 3, e formerem le frazioni.

$$\frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{20}{24}, \frac{21}{24}.$$

Vedremo nell' Algebra alcuni mezzi per facilitare l' applicazione di questo metodo.

70. La regola data precedentemente per la riduzione delle frazioni allo stesso denominatore suppone, che un prodotto risultante dalle moltiplicazioni successive di più numeri fra loro non cangi, qualunque sia l'ordine, col quale si effettuano queste moltiplicazioni. Una tal verità, che si riguarda quasi sempre come evidente, ha però bisogno d' essere dimostrata.

Bisogna cominciar dal provare, che moltiplicare un numero per il prodotto di due altri è lo stesso che moltiplicarlo prima per l' uno d' essi, e moltiplicar poi il prodotto risultante per l' altro. In vece di moltiplicare, per esempio, 3 per 35, prodotto dei numeri 5, e 7, si sarebbe potuto moltiplicare 3 per 5, e moltiplicare dipoi il prodotto di questi numeri per 7. La proposizione sarebbe evidente se in vece del numero 3 si prendesse l' unità, perchè i multi-

plicato per 5 dà 5, e il prodotto di 5 per 7 dà 35, del pari che il prodotto di 1 per 35: ma 3, o qualunque altro numero non essendo che l'unione di più unità, non seguirà di questo numero che ciò che segue di ciascuna delle unità, di cui è composto, e vale a dire, che i prodotti di 3 per 5, e per 7 ottenuti nell'una, e nell'altra maniera essendo nei due casi il triplo de' risultati, che dà l'unità moltiplicata per 5, e per 7, saranno necessariamente gli stessi. Si proverebbe nella medesima maniera che se si avesse da moltiplicare 3 per il prodotto de' numeri 5, 7, e 9, ciò ridurrebbesi a moltiplicare 3 per 5, poi il prodotto trovato per 7, e quest'ultimo prodotto per 9, e così in seguito, qualunque fosse il numero de' fattori.

Per indicare in una maniera compendiosa più moltiplicazioni successive, come quelle dei numeri 3, 5, e 7 in fra loro, scriveremo 3 per 5 per 7.

Posto ciò, nel prodotto 3 per 5 si può cangiare l'ordine dei fattori 3, e 5 (27), e si avrà tuttora il medesimo prodotto. Di quì ne segue immediatamente che 5 per 3 per 7 è lo stesso che 3 per 5 per 7.

Si può pure cangiare l'ordine dei fattori 3, e 7 nel prodotto 5 per 3 per 7, poichè questo prodotto equivale a 5 moltiplicato per il prodotto dei numeri 3, e 7; si avrà dunque ancora in 5 per 7 per 3 il medesimo prodotto che i precedenti.

Riunendo le tre combinazioni

3 per 5 per 7

5 per 3 per 7

5 per 7 per 3

si vede che il fattore 3 si è trovato successivamente il primo, il secondo ed il terzo, e che potrebbe esser lo stesso d'uno qualunque degli altri due. Quest'esempio, nel quale non si è punto considerato il valor particolare di ciascun numero, dee provare che un prodotto di tre fattori non cangia, qualunque ordine si stabilisce nelle moltiplicazioni.

Se si avesse un prodotto di 4 fattori, come 3 per

5 per 7 per 9, si potrebbero, secondo ciò che si è detto, disporre come si volessero i tre primi, o i tre ultimi, e far così passare per tutti i posti uno qualunque di questi fattori. Considerando dipoi una delle nuove disposizioni, per esempio la seguente 5 per 7 per 3 per 9, si potrebbe invertire l'ordine dei due ultimi fattori, il che darebbe 5 per 7 per 9 per 3, e porrebbesi 3 nell'ultimo posto. Si estenderanno senza pena questi ragionamenti a qualunque numero di fattori vorrassi.

71. Mediante la riduzione allo stesso denominatore, la somma, e la sottrazione della frazioni s'effettuano come nel n. 65.

72. Allorchè si hanno degl'interi accompagnati con delle frazioni, fa di mestieri in primo luogo operare sopra quest'ultime. Affine di sommare, per esempio, $5\frac{2}{7}$ con $5\frac{4}{9}$ cominceremo da ridurre al medesimo denominatore le frazioni $\frac{2}{7}$ e $\frac{4}{9}$, le quali diverranno $\frac{18}{63}$ e $\frac{28}{63}$; poi uniremo la loro somma a quella degl'interi 3 e 5; il totale sarà $8\frac{46}{63}$.

La sottrazione si opera parimente ogni qual volta che la frazione, ch'entra nel numero da sottrarsi, sarà la più piccola delle due. Nel caso contrario, affine di rendere la sottrazione possibile, è necessario prender un prestito sull'intero unito alla frazione più piccola. Se si dovesse, per esempio, togliere

$\frac{1}{5}$ da $3\frac{1}{4}$ le due frazioni ridotte al medesimo denominatore divenendo $\frac{16}{20}$ e $\frac{5}{20}$ vedrebbesi che la prima non può esser tolta dalla seconda; ma prendendo in prestito 1, ovvero $\frac{20}{20}$ sull'intero 3, cangerebbesi il numero $3\frac{1}{4}$, o $3\frac{5}{20}$, in $2\frac{25}{20}$, dal quale togliendo

$\frac{16}{20}$ resterebbe $2\frac{9}{20}$.

73. Riprendo adesso l'esame della Tavola del n. 55.

Moltiplicando	}	il numeratore	{	si moltiplica	}	la fra-
Dividendo				si divide		zione ;
Moltiplicando	}	il denominatore	{	si divide	}	la fra-
Dividendo				si moltiplica		zione ;

per dedurne delle nuove conseguenze ;

Si fa manifesto primieramente dalla sola ispezione di questa Tavola, che si può moltiplicare una frazione in due maniere, cioè moltiplicando il suo numeratore, o dividendo il suo denominatore ; e che possiam parimente dividerla in due maniere, cioè, dividendo il suo numeratore, o moltiplicando il suo denominatore, dal che ne segue che la moltiplicazione sola, secondo che s'effettua sul numeratore, o sul denominatore, serve per eseguir la moltiplicazione, e la divisione delle frazioni per dei numeri interi. Così $\frac{3}{15}$ moltiplicati per 7 unità fanno $\frac{21}{15}$; $\frac{4}{9}$

divisi per 3, fanno $\frac{4}{27}$; ec.

74. Nel numero precedente il moltiplicatore essendo un numero intero, indicava ancora, come nel n.º 22, quante volte dovea ripetersi il moltiplicando ; ma quando si dice, per esempio, che prendere il quinto d'un numero qualunque vuol dire moltiplicare questo numero per $\frac{1}{5}$, la parola *moltiplicare* non

ha più il medesimo significato, che qui sopra ; poichè dessa indica un risultato cinque volte minore del moltiplicando : nulladimeno si posson comprendere i due casi nel medesimo enunciato dicendo, che *moltiplicare un numero per un altro vuol dire comporre col primo un numero nella stessa maniera che il secondo è composto coll'unità*. Difatto, allorchè si tratta di moltiplicare per 2, per 3, ec., il prodotto

è composto di 2 volte, 3 volte, ec. il moltiplicando, nella stessa maniera che il moltiplicatore è composto di 2, 3, ec. unità; e moltiplicare un numero qualunque per la frazione $\frac{1}{5}$, per esempio, vuol dire

prenderne la quinta parte, perchè il moltiplicatore $\frac{1}{5}$ essendo la quinta parte dell'unità indica che il prodotto debb'essere la quinta parte del moltiplicando(*).

Parimente moltiplicare un numero qualunque per $\frac{4}{5}$ vuol dire prender su questo moltiplicando una parte, che ne sia i quattro quinti, oppure eguale a quattro volte un quinto di questo moltiplicando.

Segue da ciò, che la parola *moltiplicare* estesa alle espressioni frazionarie non porta sempre seco la idea di aumento, come succede rispetto ai numeri interi. Ogni qual volta il moltiplicatore sarà più piccolo dell'unità, il prodotto sarà più piccolo del moltiplicando. a cui sarebbe solamente eguale se il moltiplicatore fosse 1.

75. Poichè la *moltiplicazione per una frazione*, qualunque sia il moltiplicando, ha per oggetto di prender su questo moltiplicando una parte indicata dalla frazione moltiplicatore, quest'operazione è composta di due altre, cioè, d'una divisione, e d'una moltiplicazione, nelle quali il divisore, e il moltiplicatore son numeri interi.

Difatto, per prendere i $\frac{4}{5}$ d'un numero qualunque, per esempio, fa di mestieri primieramente trovarne la quinta parte dividendolo per 5, e ripete-

(*) Siamo condotti a quest'enunciato da un Problema il qual appresentasi spesso: quello, cioè dove si cerca il prezzo d'una porzione qualunque d'una tal cosa allorchè si conosce il prezzo dell'unità di questa cosa. Il Problema resta evidentemente lo stesso, sia che si tratti d'una quantità maggiore, o minore di questa unità.

questa quinta parte quattro volte; moltiplicandola per 4.

In generale, si fa manifesto, che *bisognerà sempre dividere il moltiplicando pel denominatore della frazione moltiplicatore, e moltiplicare il risultato per il numeratore di questa frazione.*

Se il moltiplicando è un numero intero divisibile per 5, per esempio 35, la quinta parte sarà 7; moltiplicando questo risultato per 4, avremo 28 pei $\frac{4}{5}$ di 35, ossia pel prodotto di 35 per $\frac{4}{5}$. Se il

moltiplicando, sempre intero, non è divisibile esattamente per 5, e sia per esempio 32, la divisione

per 5 darà per quoziente $6\frac{2}{5}$; ripetendo questo quoziente quattro volte avremo $24\frac{8}{5}$, locchè riducesi a $25\frac{3}{5}$ tal'è il valore di $\frac{4}{5}$ di 32.

Sarebbesi evitata la conversione di $24\frac{8}{5}$ in $25\frac{3}{5}$ se si fosse principiato da moltiplicare 32 pel numeratore 4; dividendo allora il prodotto 128 pel denominatore 5, sarebbesi immediatamente ottenuto l'ultimo risultato $24\frac{3}{5}$.

76. Passo adesso alla moltiplicazione d'una frazione per un'altra frazione.

Suppongo che s'abbia da moltiplicare, per esempio, $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$: dietro al n.º precedente, l'operazione riducesi a divider $\frac{2}{3}$ per 5, ed a moltiplicare

in seguito il risultato per 4; e mediante la Tavola del n.º 55, la prima operazione s'effettuerà moltiplicando il denominatore 3 del moltiplicando per 5, e la seconda moltiplicando il numeratore 2 del moltiplicando per 4;

il che darà per il prodotto cercato $\frac{8}{15}$

Sarebbe lo stesso di qualunque altro esempio e;

dobbiamo in conseguenza concluder da ciò, che precede, che, *per formare il prodotto di due frazioni, bisogna moltiplicare i numeratori l'uno per l'altro, e porre sotto questo prodotto quello dei due denominatori.*

77. Può succedere che s'abbiano da moltiplicar gli uni per gli altri degl'interi uniti a delle frazioni,

come, per esempio, $3\frac{5}{7}$, $4\frac{8}{9}$. Il mezzo più sempli-
per ottenerne il prodotto è di ridurre gl'interi in fra-
zioni secondo il metodo del n.^o 67; i due fattori sa-
ranno espressi in tal caso per $\frac{26}{7}$, $\frac{44}{9}$, il loro prodotto

per $\frac{1144}{63}$, o per $18\frac{10}{63}$ estraendone gl'interi (66).

78. Si dà qualche volta al prodotto di più frazio-
ni il nome di *frazion di frazione*; ed in questo senso

appunto si dice $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$. Quest' espressione indica i $\frac{2}{3}$

della quantità rappresentata da $\frac{4}{5}$ dell'unità primiti-
va, e presa in questo caso per unità. Riduconsi que-
ste due frazioni a una sola mediante la moltiplicazio-
ne (76), ed il risultato $\frac{8}{15}$ esprime il valore della

quantità cercata in rapporto all'unità primitiva, e
vale a dir che i $\frac{2}{3}$ della quantità rappresentata dai $\frac{4}{5}$

dell'unità equivalgono agli $\frac{8}{15}$ di quest'unità. Se si

volessero prendere i $\frac{7}{9}$ di questo risultato, ciò ridur-

rebbe a prendere i $\frac{7}{9}$ dei $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$ e riducendo que-

ste frazioni a una sola, avrebbe $\frac{56}{135}$ per il valore
della quantità cercata, riferito all'unità primitiva.

79. La parola *contenere* non è convenevole nul-
la di più, a tutto rigore, nei differenti casi, che

presenta la divisione, di quel che la parola *ripetere* convenga a quelli, che presenta la moltiplicazione; poichè non può dirsi, che il dividendo contenga il divisore allorchè quello è minor di quest'ultimo: tuttavia ci esprimiamo anco in questa maniera, ma solamente per analogia, e per maggiore estensione.

Ad oggetto di generalizzare la divisione, *bisogn riguardar il dividendo come composto rispetto al quoziente nella stessa maniera che il divisore è composto a riguardo dell'unità*; poichè il divisore, e il quoziente sono i due fattori del dividendo (36). Questa considerazione si presta a tutti i casi, che possa offrire la divisione. Difatto, allorchè il divisore è 5, per esempio, il dividendo è eguale a 5 volte il quoziente, e quest'ultimo è per conseguenza la quinta parte del dividendo.

Se il divisore è una frazione $\frac{1}{2}$ per esempio, il dividendo non debb' essere che la metà del quoziente, ovvero quest'ultimo debb' essere doppio dell'altro.

È manifesto che ogni qual volta il divisore sarà più piccolo dell'unità, il quoziente surpasserà il dividendo, poichè quel divisore debb' esser contenuto nel dividendo un maggior numero di volte che l'unità, la quale, presa per divisore, dà in tutti i casi un quoziente espresso dal dividendo medesimo.

La definizione, che ho stabilita, conduce facilmente alla maniera d'operare quando il divisore è una frazione. Prendiamo, per esempio, $\frac{4}{5}$, in tal caso il

dividendo debb' essere solamente $\frac{4}{5}$ del quoziente;

ma $\frac{1}{5}$ essendo $\frac{1}{4}$ di $\frac{4}{5}$ si avrebbe dunque $\frac{1}{5}$ del quoziente, prendendo il quarto del dividendo, o dividendo per

4. Conoscendo così $\frac{1}{5}$ del quoziente, non resterebbe che prendere questo risultato 5 volte, ovvero moltiplicarlo per 5, onde ottenere il quoziente. In quest'operazione si divide il dividendo per 4, e si moltiplica il risultato per 5; è dunque (75) come se si fossero presi i

$\frac{5}{4}$ del dividendo, o come se si fosse moltiplicato il dividendo per $\frac{5}{4}$, il che non è altro se non se la frazione divisore $\frac{4}{5}$ rovesciata.

Quest' esempio mostra, che in generale, *affin di dividere un numero qualunque per una frazione, bisogna moltiplicarlo per questa frazione rovesciata.*

Sia per esempio 9 da dividersi per $\frac{3}{4}$; ciò si effettuerà moltiplicando 9 per $\frac{4}{3}$, e si troverà $\frac{36}{3}$ oppure 12. Parimente 13 da dividersi per $\frac{5}{7}$ sarà lo stesso che 13 moltiplicato per $\frac{7}{5}$, ovvero $\frac{91}{5}$. Il quoziente cercato sarà $18\frac{1}{5}$ estraendo gl' interi (66).

So. Quando il dividendo è una frazione, l'operazione si riduce a *Moltiplicare (76) la frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata.*

Sia $\frac{7}{8}$ da dividersi per $\frac{2}{3}$; bisognerà moltiplicare $\frac{7}{8}$ per $\frac{3}{2}$, il che darà $\frac{21}{16}$.

È manifesto che l'operazione suddivisata può ancora essere enunciata così: *affin di dividere una frazione per un'altra, bisogna moltiplicare il numeratore della prima per il denominatore della seconda, e il denominatore della prima per il numeratore della seconda.*

Se vi fossero degli interi uniti alle frazioni proposte, si ridurrebbero in frazioni, e si applicherebbe a' risultati la sudetta regola.

81. È importante d'osservare, che s'indica col mezzo d'un'espression frazionaria una divisione qualunque, sia che dessa possa eseguirsi in numeri inte-

ri, o altrimenti: $\frac{36}{3}$, per esempio, esprimono evidentemente il quoziente di 36 per 3 del pari che 12; perchè $\frac{1}{3}$ essendo contenuto 3 volte nell'unità, $\frac{36}{3}$

saranno contenuti tre volte in 36 interi, come debb' esserlo il quoziente di 36 per 3.

82. Osserveremo senza dubbio, che la moltiplicazione, e la divisione delle frazioni si operano immediatamente col mezzo delle osservazioni esposte nella Tavola della pagina 38, laddove la somma, e la sottrazione delle frazioni richiedono una operazione preliminare. Ciò dipende da questo, che le frazioni provengono dalla divisione, la quale dipende assai da vicino dalla moltiplicazione. Si avrà spesso occasione di convincersi in seguito di questa verità, che le operazioni da farsi sopra delle quantità sono tanto più facili, quanto più si approssimano all'origine di tali quantità.

Delle Frazioni decimali

83. Benchè si possano, col mezzo delle regole precedenti, effettuare in tutti i casi sulle frazioni le quattro operazioni fondamentali dell'Arithmetica, abbiam dovuto conoscer sin da principio che, se si fossero assoggettate ad una medesima legge di decremento le diverse suddivisioni dell'unità, le quali s'impiegano per misurare le quantità minori di questa unità, il calcolo delle frazioni sarebbe divenuto molto più comodo, attesa la facilità, che sarebbesi avuta per convertir le une nell'altre. Prendendo questa legge conforme alla base del nostro Sistema di numerazione abbiamo dato al calcolo il maggior grado di semplicità, a cui sia possibile pervenire; ed ecco in qual maniera.

Abbiam veduto nel n. 3., che ciascuna delle collezioni d'unità, contenute in un numero, si compone di dieci unità dell'ordine precedente, come la decina si forma dalle unità semplici; ma niente osta che si riguardi quest'unità semplice come contenente dieci parti, di cui ciascuna sarà un *decimo*;

Il *decimo*, come contenente dieci parti, di cui ciascuna sarà un *centesimo* dell'unità;

Il *centesimo*, come contenente dieci parti, di cui ciascuna sarà un *millesimo* dell'unità; e così di seguito.

Procedendo di tal maniera , formeremo delle quantità tanto piccole quanto vorremo , per mezzo delle quali potremo in conseguenza misurar delle quantità per quanto piccole esse sieno.

Queste frazioni , che si chiamano *decimali*, perchè desse sono composte di parti dell' unità di dieci in dieci volte minori , si convertono l' une nell' altre nella stessa maniera che le *decime* , le *centinaja*, le *migliaja* , ec. si convertono in unità. Difatto.

l' unità essendo equivalente a 10 decimi

il decimo 10 centesimi

il centesimo 10 millesimi

ne risulta che il decimo equivale a 10 volte 10 millesimi ovvero 100 millesimi.

Per esempio , 2 decimi , 3 centesimi , e 4 millesimi saranno equivalenti a 234 millesimi; come 2 centinaja , 3 decime , e 4 unità fanno 234 unità: sarà lo stesso in qualunque altro caso , poichè la subordinazione delle parti dell' unità è simile a quelle dei diversi ordini d' unità.

84. In virtù di quest'osservazione si può , col mezzo delle cifre , scrivere le frazioni decimali nello stesso modo dei numeri interi ; poichè dietro alla convenzione , la quale rende dieci volte minore il valor d'una cifra posta alla destra d' un' altra, i decimi trovano naturalmente il lor posto alla destra delle unità , poi i *centesimi* alla destra dei decimi , e così di seguito: ma , per impedire che non si possano confonder le cifre, ch' esprimono delle parti decimali, con quelle , che rappresentano delle unità intere, si pone una virgola alla destra delle unità. Affine d' esprimere , per esempio , 34 unità , e 27 centesimi , scriveremo 34 , 27. Se non vi fossero le unità, se ne riempirebbe il posto con uno zero , e si farebbe lo stesso per tutte le parti decimali , che potessero mancare tra quelle , che sono enunciate nel numero proposto.

Così 19 centesimi si scrivono 0 , 19

304 millesimi 0 , 304

3 millesimi 0 , 003

85. Se si paragonano l'espressioni delle frazioni deci-

mali, di sopra colle seguenti $\frac{19}{100}$, $\frac{304}{1000}$, $\frac{3}{1000}$, le quali si ricaverebbero dalla maniera di rappresentare, in generale una frazione, vedremo, che per rappresentare sotto la forma intera una frazion decimale scritta come una frazione ordinaria, fa di mestieri prendere tale com'esso è il numeratore di questa frazione, e scriverlo in modo che abbia dopo la virgola tante cifre, quanti zeri vi sono alla destra dell'unità nel denominatore,

Reciprocamente, per ridurre una frazion decimale, scritta sotto la forma d'un intero, o quella d'una frazione ordinaria, bisogna dar per denominatore alle cifre, ch'essa contiene, l'unità seguita da tanti zeri, quante cifre vi sono alla destra della virgola.

In tal maniera le frazioni 0, 56, e 0, 036 si cangiano in $\frac{56}{100}$, e $\frac{36}{1000}$

86. L'espressione in cifre dei numeri contenenti delle parti decimali si legge enunciando prima le cifre poste alla sinistra della virgola, poi quelle, che sono alla destra, aggiungendo all'ultima di queste la denominazione delle parti, che dessa rappresenta.

Il numero 26, 736 s'enuncia 26 unità e 736 millesimi:

Il numero 0, 0673 s'enuncia 673 dieci-millesimi:

Finalmente 0, 0000673 s'enuncia 673 dieci-milionesimi.

87. Le cifre decimali non assumendo il loro valore che dal posto, ch'esse occupano per rapporto alla virgola, è indifferente di scrivere, ovvero di scancellare sulla lor destra un tal numero di zeri quanti vorremo. Per esempio 0, 5 è la stessa cosa che 0, 50; 0, 784 la medesima cosa che 0, 78400: poichè nel primo caso il numero ch'esprime la frazion decimale, è divenuto dieci volte maggiore, ma le parti son divenute centesimi, e in conseguenza dieci volte minori di quel che desse non erano in principi.

pio; nel secondo caso il numero, che esprime la frazione, è divenuto cento volte maggiore, ma le parti essendo divenute centomillesimi, son cento volte più piccole di quel che desse non erano sul principio: questa trasformazione riducesi dunque a quella, che s'opera sopra una frazione ordinaria allorchè si moltiplicano i suoi due termini per il medesimo numero; e sarebbe lo stesso che dividerli per il medesimo numero, se si sopprimessero degli zeri.

88. La somma delle frazioni decimali, e dei numeri, che le accompagnano, non dimanda altra regola che quella dei numeri interi; poichè le parti decimali si compongono l'une dell'altre, andando dalla destra alla sinistra, nella stessa maniera che le unità intere.

Sian, per esempio, 0, 56; 0, 003; 0, 958; disponendole come segue.

$$\begin{array}{r} 0, 56 \\ 0, 003 \\ 0, 958 \\ \hline \end{array}$$

Somma . . . 1, 521

trovasi, - mediante la regola del n. 12, che la loro somma è 1, 521.

Siano ancora i numeri 19, 35; 0, 3; 84, 5, e 110, 02; i quali contengono anco delle unità intere; si disporranno nel modo seguente.

$$\begin{array}{r} 19, 35 \\ 0, 3 \\ 84, 5 \\ 110, 02 \\ \hline \end{array}$$

Somma . . . 214, 17

e si troverà nel medesimo modo che la loro somma è 214, 17.

In generale, la somma dei numeri decimali si fa come quelle dei numeri interi osservando di porre alla somma la virgola nella medesima colonna ove si trovano tutte quelle dei numeri da sommarsì.

89. Le regole prescritte per la sottrazione dei

numeri interi convengono ancora , come vedremo , ai numeri decimali. Sia per esempio 0 , 3697 da togliersi da 0 , 62 : osserveremo primieramente , che il secondo numero , il quale non contiene che dei centesimi , laddovè che il primo contiene de' dieci-millesimi , può anch' esso essere convertito in dieci-millesimi , ponendo due zeri alla sua destra (87) , il che lo cangia in 0 , 6200. Disporremo in seguito l'operazione nel modo , che segue e col mezzo della rego-

$$\begin{array}{r} 0,6200 \\ 0,3697 \\ \hline \end{array}$$

Differenza 0 , 2503

la del n. 17. troveremo una differenza di 0 , 2503.

Sia pure il numero 7 , 364 da togliersi da 9 , 1457 l'operazione essendo disposta come si vede qui sotto

$$\begin{array}{r} 9,1457 \\ 7,3640 \\ \hline \end{array}$$

Differenza. . . . 1 , 7817

si trova la differenza soprassegnata. Sarebbe stato lo stesso che non metter lo zero alla destra del numero da togliersi , purchè si fossero poste le sue diverse cifre al disotto di quelle , che indicano , nel primo numero , degli ordini di unità oppure delle parti corrispondenti.

In generale , la sottrazione dei numeri decimali s' eseguisce come quella dei numeri interi , purchè si renda tal numero delle cifre decimali lo stesso nei due numeri proposti , scrivendo alla destra di quel , che n' ha meno , tanti zeri , quanti ne son necessari ; e si pone alla differenza una virgola nella colonna dove si trovano quelle dei numeri proposti.

Le riprove della somma , e della sottrazione dei numeri decimali si fanno assolutamente come quelle delle medesime operazioni sopra i numeri interi.

90. Stante che la virgola separa le collezioni di unità intere dalle parti decimali , il suo spostamento cangia necessariamente il valore del numero totale. Retrocedendola verso la destra , facciam passare nella parte intera delle cifre , le quali si trovano nella par-

te frazionaria; s' aumenta per conseguenza il valor totale del numero proposto. Al contrario, facendo avanzare la virgola verso la sinistra, si fanno passar nella parte frazionaria delle cifre, che si trovavano nella parte intera, ed in conseguenza si diminuisce il valor totale del proposto numero.

Il primo cangiamento rende il numero proposto dieci, cento, mille, ec. volte maggiore secondo che si fa retrocedere la virgola d' uno, di due, di tre ordini verso la destra; perchè ogni qual volta la virgola retrocede così d' un passo, tutte le cifre, paragonate al posto di questa virgola, avanzando d' un posto verso la sinistra, prendono in conseguenza un valore dieci volte maggior di quello, che desse avevano in sul principio.

Se, per esempio, nel numero 134, 28 si porti la virgola tra 2, e 8 avremo 1342, 8; le centinaja saranno divenute miglaja, le diecine centinaja, le unità diecine, i decimi unità, ed i centesimi decimi. Tutte le parti del numero essendo divenute dieci volte maggiori, è il medesimo come se desso si fosse decuplato, ovvero moltiplicato per dieci.

Il secondo cangiamento rende il numero proposto dieci, cento, mille, ec. volte minore, secondo che si fa avanzare la virgola d' uno, due, tre ordini o gradi verso la sinistra; perchè ogni qual volta si fa avanzare la virgola d' un passo, tutte le cifre paragonate al posto di questa virgola si avanzan d' un passo verso la sinistra, e prendono in conseguenza un valore dieci volte minor di quello, ch' esse aveano in principio.

Se nel numero 134, 28 si porta la virgola tra il 3, ed il 4, avrem 13, 428; le centinaja saranno divenute diecine, le diecine unità, le unità decimi, i decimi centesimi, i centesimi millesimi. Tutte le parti del numero essendo divenute dieci volte minori è lo stesso come se se ne fosse preso il decimo, oppure che si fosse diviso per dieci.

91. E' facile prevedere, dietro alle considerazioni antecedenti, il vantaggio, che le frazioni decimali, hanno sulle frazioni ordinarie; tutte le moltiplicazio-

ni, o divisioni, che bisogna effettuare per il denominator di quest'ultime, s'effettuano nelle altre coll'aggiungere, o sopprimere un certo numero di zeri, oppure mediante il semplice spostamento della virgola. Adattando queste modificazioni alla Teoria delle frazioni decimali, e segnatamente la maniera d'effettuare la moltiplicazione, e la divisione sopra queste frazioni; ma possiamo arrivarci direttamente col mezzo delle considerazioni seguenti.

Supporrò primieramente, che il moltiplicando solo abbia delle cifre decimali. Se facciasi astrazione dalla virgola, desso diventerà dieci, cento, mille, ec. volte maggiore, secondo il numero delle sue cifre decimali; ed il prodotto, che in questo caso darà la moltiplicazione, sarà un egual numero di volte maggior di quello, che si cercava; otterrem dunque quest'ultimo col dividere l'altro per dieci, cento, mille, ec.; il che s'effettuerà separando sulla destra (96) tante cifre decimali, quante ve n'erano nel moltiplicando.

Se, per esempio, s'avesse da moltiplicare 34, 137 per 9, formerebbesi primieramente il prodotto di 34137 per 9, il che darebbe 307233; e siccome la suppression della virgola avrebbe reso il moltiplicando mille volte maggiore di quel che desso non era, bisognerebbe divider per mille il prodotto trovato, o sìvvero separare con una virgola le sue tre ultime cifre alla destra: avrebbesi in tal maniera 307,233.

In generale, *affin di moltiplicare per un numero intero un numero accompagnato da cifre decimali, si separano sulla destra del prodotto tante cifre decimali, quante ne conteneva il moltiplicando.*

92. Allorchè il moltiplicatore contiene delle cifre decimali, e che si fa astrazione dalla virgola, si rende questo dieci, cento, mille, ec. volte maggiore, secondo il numero delle sue cifre decimali: impiegandolo in questo stato, desso darà evidentemente un prodotto dieci, cento, mille, ec. volte maggiore di quello, che sarebbesi dovuto avere, ed in conseguenza questo s'otterrà col dividere il primo

per uno di questi numeri, e vale a dire, separando sulla destra tante cifre decimali, quante ne conteneva il moltiplicatore, oppure facendo avanzare d'un egual numero di passi, verso la sinistra (90), la virgola, che troverebbesi nel prodotto se il moltiplicando avesse pure dei decimali.

Sia per esempio, 172, 84 da moltiplicarsi per 36, 003: facendo astrazione dalla virgola del moltiplicatore solamente, avrebbesi, dietro al num. precedente, il prodotto 6222758, 52; ma il moltiplicatore trovandosi mille volte maggior di quel che non avrebbe dovuto esserlo, bisognerà dividere questo prodotto per mille, oppure fare avanzare la virgola di tre passi verso la sinistra; il che darà 6222, 75852 pel prodotto cercato, nel quale si troveranno per conseguenza tante cifre decimali, quante insieme ve ne sono tanto nel moltiplicando che nel moltiplicatore.

In generale, per moltiplicare l'uno per l'altro due numeri accompagnati da cifre decimali, faremo astrazione dalle virgole nell'uno e nell'altro: ma separeremo sulla destra del prodotto, tante cifre decimali, quante ne contengono amendue.

In certi casi bisogna porre uno, o più zeri sulla sinistra del prodotto, per dare al medesimo il numero delle cifre decimali, che desso dee avere secondo la regola precedente. Se si avesse per esempio 0, 624 da moltiplicare per 0, 003, formando primieramente il prodotto di 624 per 3, avrebbesi il numero 1872, il quale non contiene che quattro cifre; e siccome bisognerebbe separare 6 cifre decimali, non si potrebbe farlo se non che ponendo alla sinistra di questo numero tre zeri, uno dei quali terrebbe il posto delle unità; il che farebbe 0, 001872.

93. E' evidente (47) che il quoziente di due numeri non dipende dalla grandezza assoluta delle loro unità, purchè questa sia la medesima nell'uno, e nell'altro. Se si trattasse dunque di dividere 451,49 per 13, osserverebbesi che il primo riducesi a 45149 centesimi, ed il secondo a 1300 centesimi, e che questi ultimi numeri debbon dare lo stesso quoziente come se dessi esprimessero delle unità intere. Saremmo così con-

dotti a sopprimer la virgola nel primo dei numeri proposti, ed a porre due zeri alla destra del secondo, ed allora non dovrebbe farsi altro che dividere il numero 45149 per 1, 300, il che darebbe per quoziente

$$34 \frac{949}{1300}$$

Concluderemo da ciò che, *affin di dividere per un numero intero un numero accompagnato da cifre decimali; bisogna sopprimer la virgola in quest'ultimo, porre alla destra dell'altro tanti zeri quante cifre decimali contiene questo dividendo: e non si dovrà fare alcun cambiamento nel quoziente.*

94. Allorchè il dividendo, ed il divisore sono amendue accompagnati da cifre decimali, si dee, prima di sopprimer la virgola, porre alla destra di quello dei due numeri, che ha meno cifre decimali, tanti zeri quanti abbisognano perchè desso termini al medesim' ordine di decimali che l'altro. I due numeri proposti essendo allora riportati alle medesime parti dell' unità, daranno il medesimo quoziente, che darebbero se desso esprimessero unità intere:

Sia, per esempio, 315,432 da dividersi per 23,4: cangeremo quest'ultimo numero in 23, 400, e divideremo in seguito 315432 per 23400: il quoziente sarà 13 $\frac{11232}{23400}$.

Così, *affin di dividere l'uno per l'altro due numeri accompagnati da cifre decimali, si pongono alla destra di quel che ne ha meno, tanti zeri, quanti ne son necessarij perchè il numero delle cifre decimali sia lo stesso nel dividendo, e nel divisore; si fa allora astrazion dalla virgola, e non si dee fare cambiamento nessuno nel quoziente.*

95. Siccome non siamo ricorsi ai decimali che per evitar l'impiego delle frazioni ordinarie, è naturale servirsene per approssimarsi ai quozienti, che non si possono esattamente ottenere; il che si fa convertendo in decimi, centesimi, millesimi ec. il resto, affine ch'esso possa contenere il divisore, come si vede nell'esempio seguente.

	45149	1300
	6149	
Resto . . .	949	34, 73
Decimi . . .	9490	
centesimi..	3900	
	0000	

Allorchè siam pervenuti al resto 949, vi si unisce un zero, affine di moltiplicarlo per dieci, ossia convertirlo in decimi; formasi allora un nuovo dividendo parziale composto di 9490 decimi, e dà per quoziente 7 decimi, i quali si scrivono alla destra delle unità dopo d' avere interposta una virgola. Restano ancora 390 decimi, i quali si riducono in centesimi mediante l'aggiunta d'un nuovo zero, il che forma un secondo dividendo composto di 3900 centesimi; si ottien per quoziente 3 centesimi, i quali pongonsi alla destra dei decimi. L'operazione rimane così terminata, ed abbiamo per risultato esatto 34, 73 centesimi. Se questa operazione avesse lasciato un terzo resto, si sarebbe spinta più oltre convertendo questo resto in millesimi, e continuando sempre della stessa maniera fino a tanto che non si fosse pervenuto a un quoziente esatto, oppure ad un resto composto di parti tanto piccole, che si potessero riguardare come di niuna importanza.

E' manifesto che bisogna sempre, come nell'esempio suddivisato, porre una virgola dopo delle unità intere del quoziente, per distinguerle dalle cifre decimali, il cui numero debb'essere eguale a quello degli zeri scritti successivamente alla destra dei resti (*).

(*) L'operazione, che abbiamo effettuata sopra i decimali, non è che un caso particolare di quest'altro più generale: *Valutare il quoziente d'una divisione in frazioni d'una specie data*: e per eseguirla, convertesi il dividendo in frazioni della medesima specie, moltiplicando per il denominatore dato. Così, per valutare in quindicesimi il quoziente di 7 per 3, si moltiplicherà 7 per 15, e divideremo il prodotto 105 per 3, avremo 35 quindicesimi, ovvero $\frac{35}{15}$ pel dimandato quoziente.

96. Il numeratore d'una frazione essendo convertito in parti decimali, potrà dividersi pel denominatore, come nell'esempio precedente, e con questo mezzo la frazione sarà convertita in decimali. Sia per esempio, la frazione $\frac{1}{8}$; opereremo nel modo seguente.

$$\begin{array}{r} 1 \quad | \quad 8 \\ \hline 10 \quad | \quad 0, 125 \\ 20 \quad | \\ 40 \end{array}$$

Sia altresì la frazione $\frac{4}{797}$; bisogna primieramente convertire il numeratore in millesimi prima di poter principiare la divisione scritta qui sotto.

$$\begin{array}{r} 4 \quad | \quad 797 \\ \hline 4000 \quad | \quad 0, 005018 \quad (**) \\ 1500 \\ 7030 \\ 654 \end{array}$$

97. Per quanto spingasi lungi quest'ultima divisione, non conseguiremo giammai un quoziente esatto, perchè la frazione $\frac{4}{797}$ non può, come la fra-

(**) Possiam pure proporci di convertire una frazione data in frazione d'un'altra specie, ma minor della prima, di trasformar, per esempio $\frac{3}{4}$ in diciassettesimi; arriveremo a ciò moltiplicando 3 per 17, e dividendo il prodotto per 4. Troveremo in questa maniera $\frac{51}{4}$ di diciassettesimo, oppure $\frac{12}{17}$, e $\frac{3}{4}$ di diciassettesimo; ora $\frac{3}{4}$ d'un diciassettesimo equivalgono a $\frac{3}{68}$: il risultato $\frac{12}{17}$ è dunque vicino al vero di $\frac{3}{68}$ a un dipresso.

zione $\frac{1}{8}$, esprimersi rigorosamente col mezzo dei decimali.

Questa differenza dipende da ciò che il denominatore della frazione, il qual non divide il suo numeratore, non può dare un quoziente esatto se non che quando esso divide uno dei numeri 10, 100, 1000, ec., per quali si moltiplica successivamente il suo numeratore; poichè egli è un principio, che troveremo dimostrato nell'Algebra, che qualunque numero non può dividere un prodotto se non che quando i di lui fattori dividon quelli di questo prodotto. Ora i numeri 10, 100, 1000, ec. essendo tutti formati dal numero 10, di cui i fattori sono 2, e 5, non son dessi divisibili se non che per de' numeri formati da questi fattori medesimi; 8 è in questo caso, poichè risulta da 2 per 2 per 2.

Le frazioni, le quali non possono valutarsi rigorosamente per mezzo dei decimali, offrono nella loro espressione approssimativa, allorchè questa si spinge bastantemente lontana, un carattere, che serve a farle trovare; questo è il ritorno periodico delle medesime cifre nell'istess' ordine.

Se si converte in decimali la frazione $\frac{12}{37}$, troveremo 0, 524324 e le cifre 3, 2, 4 ritorneranno sempre nel medesim' ordine, senza che l'operazione possa mai terminarsi.

Difatto, siccome non può aversi per resto in ciascuna divisione che uno dei numeri interi, i quali precedono il divisore, bisogna necessariamente che quando avrem fatte più divisioni di quel che non sian questi numeri, ricadasi sopra qualcuno dei resti precedenti e che in conseguenza i dividendi parziali ritornino nello stess' ordine. Nell'esempio suddivisato tre divisioni bastano per arrivare a questo ritorno; ma

ne bisognerebbero sei per la frazione $\frac{1}{7}$, perchè si troverebbero allora per resti i sei numeri, che sono al disotto di 7, ed otterrebbeisi 0, 1428571

La frazione $\frac{1}{3}$ conduce solamente a 0, 3333

98. Le frazioni, le quali hanno per denominatore un numero qualunque di 9, non hanno nel loro periodo se non che la cifra significativa 1:

$\frac{1}{9}$ somministra 0, 1111

$\frac{1}{99}$ 0, 010101

$\frac{1}{999}$ 0, 001001001

e così delle altre; poichè ciascuna delle divisioni parziali, effettuandosi sopra i numeri 10, 100, 1000, ec., lascia sempre per resto l'unità.

Profittando di quest'osservazione, si passa facilmente da una frazione decimale periodica alla frazione ordinaria, da cui essa deriva. Si fa manifesto, per esempio, che 0, 33333 riducesi alla frazione $\frac{1}{3}$; 0, 11111 moltiplicata per 3; e siccome quest'ultima è lo sviluppo di $\frac{1}{9}$, se ne conclude, che la prima è quello di $\frac{1}{9}$, moltiplicato per 3, oppure di $\frac{3}{9}$, ovvero finalmente di $\frac{1}{3}$.

Quando trattasi di frazioni, il cui periodo è composto di due cifre, si paragonano queste allo sviluppo di $\frac{1}{99}$; a quello di $\frac{1}{999}$ allorchè il loro periodo contien tre cifre; e così di seguito.

Sia, per esempio, 0, 324324 è manifesto che questa frazione si formerebbe moltiplicando 0, 001001 . . . pel numero 324: moltiplicando dunque $\frac{1}{999}$, di cui quest'ultima frazione è lo sviluppo, pel numero 324, avremo $\frac{324}{999}$ per la prima; e dividendo i due termini di questo risultato per 27, caderemo sulla frazione $\frac{12}{37}$.

In generale, la frazione ordinaria, dalla quale risulta una frazione decimale periodica, si forma scrivendo come denominatore sotto il numero, ch'esprime un periodo, tanti 9 quante cifre vi sono in questo periodo,

Se il periodo della frazione non cominciassero alla prima cifra decimale, potrebbesi trasportare, per un istante, la virgola immediatamente avanti la sua prima cifra, e valutar la frazione a partirsi da questa cifra, solamente, considerando come delle unità quelle, che sono alla sinistra: altro non dovrebbe fare in seguito che divider il risultato per 10, 100, 1000, ec. secondo il numero dei passi, per cui avremo fatto retrocedere la virgola verso la destra.

La frazione $0,32414\ldots$, per esempio, la scriveremo in primo luogo così $32, 4141\ldots$: la parte $0,4141\ldots$ corrispondendo a $\frac{41}{99}$, avremo il risultato $32 \frac{41}{99}$, il quale bisognerà divider per 100, poichè la virgola è stata traslocata di due passi verso la destra; ed otterremo per conseguenza $\frac{32}{100}$, e $\frac{41}{9900}$, oppure riducendo al medesimo denominatore $\frac{3209}{9900}$; frazione, la quale riprodurrebbe lo sviluppo proposto.

Per formarsi un'idea ben chiara della natura di quest'espressioni, basta di considerar la frazione $0,999\ldots$. Cercando di risalire al suo valor primitivo, si trova che dessa corrisponde a 9 diviso per 9; il che non è altra cosa che l'unità: frattanto, qualunque sia il numero delle cifre, al qual ci arrestiamo nella sua espressione, non formeremo giammai l'unità. Se ci limitiamo alla prima, avremo bisogno di $\frac{1}{10}$, alla seconda di $\frac{1}{100}$, alla terza di $\frac{1}{1000}$, e così di seguito; di maniera che possiamo avvicinarci all'unità tanto quanto vorremo, ma senza mai giungervi. L'unità non è dunque qui che un *limite*, al quale l'espressione $0,999\ldots$ si approssima tanto più, quanto più vi s'inseriscono delle cifre.

99. Ciò, che precede, contiene le regole vera-

ELLE MISUR

tema metodico della l

MISURE PRI

lunghezza	Di capacità	D
tro (me.)	Litro (li.)	Gran
decimill'one- na parte del- distanza dal lo all' equa- re	Un decime- tro cubo	Peso time di ac lata



ment: essenziali dell' Aritmetica dei numeri astratti; ma, per applicarle agli usi della Società, fa di mestieri conoscere le diverse unità, di cui ci serviamo, onde paragonarle tra loro, oppure valutare le quantità sotto qualunque forma, che desse si presentino. Queste unità, le quali sono le *misure* in uso hanno variato coi tempi, e coi luoghi; il loro concatenamento non s'è formato che a poco a poco, secondo che il bisogno, ed i progressi delle Arti, e delle Scienze hanno obbligato a porre maggiore esattezza nell'apprezzamento delle materie, e nella costruzione degli istrumenti.

Dopo d'aver provati per lungo tempo gl'inconvenienti d'un Sistema composto di parti incoerenti, e di cui il difetto di legame poneva nei calcoli una complicazione inutile, e nel medesimo tempo nocevole all'istruzione generale, i più illustri Dotti Francesi hanno finalmente ottenuto lo stabilimento delle nuove misure legate tra loro, assoggettate all'andamento del Sistema di numerazione, prese immediatamente sulle dimensioni del Globo, che noi abitiamo, e sulla più comune delle distanze, che desso presentaci. L'estensione di questo Trattato, ed il posto, che occupa nell'istruzione, non mi permettono di presentare l'estratto di tutti i lavori scientifici eseguiti per lo stabilimento di questo Sistema, e che fanno il più bel monumento elevato alla gloria delle Scienze, ed all'utilità pubblica nel passato Secolo: io mi limiterò soltanto ad esporne i principj, e l'uso sommariamente.

Esposizione del nuovo Sistema metrico, ed applicazioni usuali dell' Aritmetica.

100. Le misure prendono delle forme, e dei nomi differenti secondo la specie delle grandezze, alla quale si applicano. Queste grandezze possono esser classate nella maniera seguente.

Le lunghezze, dalle quali nascono le misure lineari;

Le superficie, o sivvero le aree;

I volumi, oppure le capacità, mediante le quali si paragonan tra loro i corpi, tanto solidi, che liquidi.

Finalmente le gravità, o sivero i pesi, i quali servono pure al paragone dei corpi.

L'unità di lunghezza, ossia l'unità lineare si chiama *metro* ;

L'unità di superficie *ara* :

L'unità di volume *stero*, o *metro cubo* (*)

L'unità di capacità *litro* ;

L'unità di peso *grammo*.

Per comporre delle misure maggiori, o minori delle precedenti, ci serviamo delle parole *mirio*, *chilio*, *ecato*, *deca*, *deci*, *centi*, *milli*, ec.; ricavate dal Greco, e dal Latino, e che indicano rispettivamente delle decine di migliaia, delle centinaia, delle decine, dei decimi, dei centesimi, dei millesimi, ec. Le misure di lunghezza formano dunque la serie seguente: *miriametro*, *chiliometro*, *ecatometro*, *decametro*, **METRO**, *decimetro*, *centimetro*, *millimetro*, ec.

Ciascuna di queste misure è dieci volte maggiore di quella, che la segue, e dieci volte minore di quella, che la precede immediatamente nell'ordine della serie.

Il *litro* è una misura di capacità; il suo contenente equivale al decimetro cubo.

I nomi delle misure di capacità si compongono come quelli delle misure di lunghezza; così diremo *ecatolitro*, *decalitro*, *litro*, *decilitro*, *centilitro*, ec.

Il *grammo* è un peso eguale al peso d'un centimetro cubo d'acqua pura (**). Il *miriagrammo*, il *chiliogrammo*, l'*ecatogrammo*, il *decagrammo*, il *grammo*, il *decigrammo*, il *centigrammo*, ec. formano una serie decimale, nello stesso modo che le altre misure.

L'*ara* è una misura di superficie, eguale al decametro quadrato, e vale a dire, a un quadrato, il

(*) Si chiama *cubo* un corpo terminato da sei faccie quadrate, ed eguali.

(**) Per ottenere maggior esattezza nella determinazione di quest'unità, si è fatto uso dell'acqua distillata, la quale è stata ridotta al suo *maximum* di densità, mediante un convenevole raffreddamento.

cui lato fosse un decametro, ovvero ancora a cento metri quadrati. Non vi sono che due misure multiple dell' ara, le quali sembrano avere qualche utilità, una l' *ecatara*, la quale equivale a cento are: l'altra è la *miriara*, la quale n' equivale a diecimila.

Lo *stero*, per il legname da ardere, è un metro cubo, il quale suppone dei pezzi da catasta della lunghezza d' un metro posti dentro un telajo quadrato di un metro per lato, o sìvvero con qualunque altra disposizione equivalente. I composti dello *stero* non sembrano dover servire agli usi ordinarij.

Finalmente le unità di moneta son conosciute adesso sottò il nome di *franco*, di *decimo*, di *centesimo*. I lor valori relativi sono egualmente di dieci in dieci volte minori.

Il franco è stato formato d' un pezzo d' argento del peso di 5 grammi, e colla lega di $\frac{1}{10}$ di rame (*)

La *Tavola* qui unita è adattatissima per far conoscere i vantaggi dell'uniformità introdotta nella nomenclatura dei multipli, e delle suddivisioni delle misure prese per unità. Allato di ciascun nome si trova, tra parentesi, il compendio proposto dal Sig. Dillon, già Verificatore generale de' pesi, e misure.

101. Tutti i Problemi, nei quali si tratta di riunire in un solo più numeri d' una medesima specie di misure, si riportano evidentemente alla somma.

Così, per sapere ciò, che hanno prodotto tre

(*) Un carattere essenziale, che assicura a questo Sistema la superiorità sopra tutti quelli, che sono stati inventati in questo genere, si è che tutte le misure sono collegate tra loro, ed hanno un rapporto immediato colle stesse dimensioni della Sferoide terrestre. Il metro è la diecimillesima parte della distanza dal polo all' equatore, contata sul meridiano, che passa per Parigi. L' arco di questo meridiano, il quale traversa la Francia, essendo stato misurato con un' esattezza incognita fino al presente, e calcolato colla maggior precisione mediante i metodi del Signor *Delambre*, n' è stata conclusa la distanza che si trova tra il polo, e l' equatore dietro alla quale si è stabilito il metro.

contratti, ne' quali si è venduto successivamente per 1334fr., 45; 1951fr., 17; 183fr., 11 d'una certa derrata; basta sommare i tre numeri suddivisati, e la risposta al Problema proposto si troverà nel totale 3468fr., 73.

Suppongo ancora che siansi comprate quattro pezze di stoffa, le cui lunghezze siano espresse da 217mi., 43; 97mi., 21; 194mi., 07; 51mi., 34: la somma di questi numeri espressa da 560mi., 05 darà la quantità total della stoffa.

L'applicazione della sottrazione è troppo facile per trattenermivi.

102. È manifesto che mediante il soccorso della moltiplicazione si trova il valore d'un numero dato di cose della medesima specie, e dello stesso valore, subitochè si conosce quest'ultimo; poichè trattasi allora di ripeterlo tante volte quante sono le cose, qualunque sian queste cose.

Si vede, che il prodotto non dipende dalla specie d'unità del moltiplicatore, ma che desso è della specie del moltiplicando, e che il moltiplicatore debb'esser considerato come un numero astratto. Questa considerazione serve a determinare in una moltiplicazione di numeri concreti quello, che si dee prendere per moltiplicatore.

Se per esempio, il metro d'una certa stoffa costa 19fr., 25, e che se ne dimandi il prezzo d'una pezza contenente 37mi., 14, servirà di moltiplicare 19fr., 25 per 37, 14; il prodotto 714fr., 25 sarà il prezdimandato.

Difatto è manifesto, che il prezzo della pezza debb'esser composto, mediante quello del metro, nella maniera medesima che la lunghezza di questa pezza è composta riguardo al metro. Così, la pezza, che contiene 37 volte il metro più $\frac{14}{100}$ di questa misura, dee costare 37 volte 19fr., 25 più $\frac{14}{100}$ di questo prezzo; fa dunque mestieri moltiplicare 19fr., 25 per 37 e $\frac{14}{100}$, e queste due operazioni son riuni-

te in una sola allorchè si prende 37, 14 per moltiplicatore.

Possiamo ancor concepire l'operazione sotto questo semplicissimo punto di vista: riguardando primieramente la somma di 19fr., 25 come il prezzo di un centimetro di stoffa, vale a dire, dell'unità dell'ultim'ordine del moltiplicatore, diviene evidente, che il prezzo totale debbe ottenersi ripetendo 3714 volte la somma di 19fr., 25; ma oltretutto 3714 essendo un numero cento volte maggiore del vero moltiplicatore 37, 14, ridurremo il prodotto al suo giusto valore prendendone la centesima parte, oppure separando due cifre decimali di più.

Finalmente, in terzo luogo, riconoscesi senza pena che il prezzo del metro essendo di 19fr., 25, quello dell'unità dell'ultim'ordine del moltiplicatore, ossia del centimetro, nell'esempio attuale, che deve esserne la centesima parte, sarà espresso da 1925 ed avremo il prezzo di 37mi., 14, ovvero 3714 centimetri, moltiplicando 1925 per 3714.

103. Questa maniera di considerare il Problema s'appoggia alla facilità di convertire l'una nell'altre le suddivisioni d'una medesima specie di misure mediante il semplice cangiamento di posto della virgola, secondo le osservazioni del num.^o 90. Se si volessero, per esempio, convertire 314mi., 513 in decimetri, servirebbe far retrocedere la virgola d'un passo verso la destra, il che darebbe 3145decim., 13; poichè allora si prenderebbe il decimetro per unità.

Sopprimendo la virgola, i millimetri divengono unità, ed abbiamo, in conseguenza il numero dei millimetri contenuti nella grandezza proposta espresso da 314513mi.

104. Ritornerebbesi da quest'ultima suddivisione a quelle, che ad essa precedono, e vale a dire al centimetro, al decimetro, al metro, separando successivamente una, due, o tre decimali. Mentre se se ne separassero quattro, prenderebbesi il decametro per l'unità, ed avrebbesi 31 Dmi., 4513; continuando nella maniera medesima; otterrebbe 3 Emi.; 14513 ec.

Queste considerazioni, e quelle del num. prece-

dente s'applicano senza pena a qualunque altra specie di misure del Sistema decimale, ed offrono uno dei maggiori vantaggi di questo sistema.

105. Indicherò adesso alcuni usi della divisione. Dessa serve primieramente a risolvere tutti i problemi del genere del seguente. *Conoscendo ciò, ch'è costata un certo numero di cose dello stesso valore, trovare questo valore.* Questo si trova osservando, che il prezzo cognito è necessariamente il prodotto del prezzo d'una cosa moltiplicato per il numero delle cose (102); poichè risulta da ciò, che se dividasi questo prodotto per lo fattore cognito, ch'è il numero delle cose, si dee ottener per quoziente l'altro fattore, ovvero il prezzo d'una sola cosa (36).

Suppongo, per esempio, che avendo pagato per 19m, 13 di stoffa 315fr., 45, si dimandi il costo d'un metro della medesima. Affin di trovarlo, divideremo 315, 45 per 19, 13, ed otterremo 16fr., 49.

Arriverebbesi al risultato stesso anco nella maniera, che segue. Se si convertissero 19m, 13 in 1913 centimetri, e che si dividesse 315fr., 45 per 1913, avrebbesi il prezzo d'un centimetro, il quale bisognerebbe moltiplicare in seguito per 100, onde aver quello d'un metro: ora egli è manifesto, che impiegando un divisore come 19, 13 cento volte minore di 1913, s'otterrà un quoziente cento volte maggiore, ed in conseguenza eguale a quel, che si cerca. Dividendo dunque 315fr., 45 per 19, 13, troveremo 16fr., 49 per il prezzo d'un metro di stoffa.

106. Ecco un secondo Problema, nel quale il dividendo, ed il divisore son ambedue della stessa natura, e dove il quoziente è d'una natura diversa.

Si domanda quanti chiliogrammi d'una certa mercanzia, la quale costa 14fr., 5 il chiliogrammo, avremo con 529fr., 35. È chiaro che il numero cercato è composto col chiliogrammo (sua unità) come 529fr., 35 lo è con 14fr., 5 prezzo d'un chiliogrammo. Se dunque si divida 529, 35 per 14, 5 il quoziente 36, 50689 esprimerà dei chiliogrammi, e delle suddivisioni di questa specie d'unità.

107. L'impiego delle frazioni si offre di per sè stesso mediante l'enuuciato dei rispettivi Problemi.

Se, per esempio, bisognasse valutare i $\frac{3}{4}$ di 219fr., 6, si dovrebbe moltiplicare 219fr., 6 per $\frac{3}{4}$ e vale a dire, moltiplicar questo numero per 3, e dividere in seguito il risultato per 4; il che darà 164fr., 7 (75).

Potrebbero crescere molto di numero i diversi Problemi, che si risolvono mediante le quattro regole dell' Aritmetica; ma questa cura ell' è inutile; imperocchè l'applicazione di queste regole non può presentare nessuna difficoltà, allorchè si è ben intesa la definizione, ed il fine di ciascheduna.

Delle Proporzioni.

108. Abbiamo veduto in ciò, che precede, i diversi metodi necessari per effettuare sui numeri, tanto interi, che frazionarij, le quattro operazioni fondamentali dell' Aritmetica, la somma cioè, la sottrazione, la moltiplicazione, e la divisione; e tutti i dati Problemi concernenti ai numeri debbon essere riguardati come risolti allorchè, mediante l'esame attento del loro enunciato, siam pervenuti a ridurli ad alcuna di queste operazioni. Potrei in conseguenza terminare qui ciò, che ho da dire sull' Aritmetica; poichè il rimanente è, a parlar propriamente, d'attenenza dell' Algebra; ma nonostante risolverò alcuni Problemi, i quali, esercitando i Lettori su quello, che dessi hanno di già veduto, gli prepareranno alla Analisi Algebrica, e gli condurranno ad una Teoria importantissima, quella, cioè, dei rapporti, e delle proporzioni, la qual si comprende ordinariamente nell' Aritmetica.

109. Una pezza di drappo lunga 13 metri è stata pagata 130 franchi; si domanda quanto costerebbe una pezza del medesimo drappo, la quale avesse 18 metri di lunghezza.

È evidente che, se si sapesse il prezzo d' un metro del drappo, che si è comprato, ripeterebbesi questo prezzo diciotto volte; ed avrebbesi per risultato il prezzo della pezza composta di 18 metri. Ora, poi-

chè 13 metri son costati 130 fr. , un metro solo sarà costato la tredicesima parte di 130 fr. ovvero

$\frac{130}{13}$: facendo la divisione trovasi per risultato 10 fr.

e moltiplicando questo numero per 18 , si ottiene 180 fr. per la somma dimandata. Tal'è infatti il valor della pezza di diciotto metri.

Un Corriere , il quale si muove sempre colla stessa celerità , avendo percorso 5 miriametri in 3 ore : si dimanda quanti ne percorrerà in 11 ore :

Ragionando come nell'esempio precedente , si vede che questo corriere percorrerebbe in un'ora $\frac{1}{3}$ di 5 miriametri , ovvero $\frac{5}{3}$, e che in 11 ore desso ne percorrerebbe 11 volte altrettanti , oppure $\frac{5}{3}$ di miriametro moltiplicati per 11 , ovvero finalmente $\frac{55}{3}$, il che equivale a 18 miriametri e $\frac{1}{3}$.

Suppongo ancora che si dimandi in quanto tempo il corriere del Problema antecedente percorrerebbe 22 miriametri.

Si vede che , se si conoscesse il tempo , che desso impiega nel percorrere un miriametro , ripeterebbsi questo tempo 22 volte , ed avrebbsi per risultato il numero d'ore cercato : ora , il Corriere , di cui si tratta ; impiegando 3 ore nel percorrere 5 miriametri , non impiegherà che $\frac{1}{6}$ di questo tempo , ovvero $\frac{3}{5}$ d'ora , per trascorrere un miriametro : questo numero , essendo moltiplicato per 22 , dà $\frac{66}{5}$ oppure 13 ore e $\frac{1}{5}$; e siccome l'ora è di 60 minuti avremo 13 ore e 12 minuti in luogo di 13 ore e $\frac{1}{6}$,

110. Mediante l'analisi di ciascuno degli enunciati precedenti ho scoperto la quantità incognita ; ma in tutti questi Problemi i numeri cognitivi , ed i numeri cercati dipendono gli uni dagli altri d'una maniera , ch'è a proposito d'esaminare.

Per questo, riprendo il primo Problema, in cui trattasi di conoscere il prezzo di 18 metri di drappo del quale 13 metri sono stati pagati 130 fr.

E' manifesto, che la somma da pagarsi per una pezza del drappo, di cui si parla, diverrebbe doppia se questa pezza contenesse un numero di metri doppio del primo, che se questo numero divenisse triplo, il prezzo pure si triplicherebbe; e così di seguito; finalmente, che per la metà, ovvero per $\frac{1}{2}$ della pezza, non dovrebbe pagarsi che la metà, oppure $\frac{2}{3}$ del prezzo totale.

Dietro a queste nozioni, che tutti quelli, i quali intendono la proprietà dei termini, ammettono senza difficoltà, si fa chiaro che, se si hanno due pezzi del medesimo drappo, il prezzo della seconda dee contener quello della prima tante volte quante la lunghezza della seconda contien quella della prima, e questa circostanza s' enuncia dicendo, che i prezzi sono in *proporzione* delle lunghezze, ovvero che son tra loro nel medesimo *rapporto* delle lunghezze.

Quest' esempio servirà a stabilire il senso di più espressioni, le quali ritornano spesso.

111. Il *rapporto* delle lunghezze è il numero tanto intero che frazionario, il qual' esprime quanto una delle lunghezze contiene l'altra. Se la prima pezza fosse 4 metri, e la seconda 8, il rapporto di quest' ultima alla prima sarebbe 2; poichè 8 contiene 4 due volte. Nell' esempio sopra esposto la prima pezza era di 13 metri, e la seconda di 18; il rapporto di questa colla prima era dunque $\frac{18}{13}$, ovvero 1 e

$\frac{5}{13}$. In generale, il *rapporto*, ovvero la *ragione* di due numeri, è il *quoziente* dell' uno diviso per l' altro.

I prezzi avendo tra loro il medesimo rapporto delle lunghezze, bisogna che 180, prezzo della seconda pezza, essendo diviso per 130, prezzo della prima

dia $\frac{18}{13}$ per quoziente: questo è ciò, che ha difatto luogo; poichè riducendo $\frac{180}{130}$ alla sua più semplice espressione, si ha $\frac{18}{13}$.

I quattro numeri 13, 18, 130, 180 scritti nell'ordine, in cui qui si vedono, son dunque tali che *il secondo contiene il primo tante volte quanto il quarto contiene il terzo*; ed essi formano, come si dice una *proporzione*.

I numeri 13, 18, 130, e 180 si chiamano i termini della proporzione.

Si dice pure, *una proporzione è la riunione di due rapporti eguali*.

Bisogna osservare in quest'occasione, che un rapporto non cangia allorchè si moltiplicano, e si dividono i suoi due termini per un medesimo numero; e questo è evidente; poichè siffatto rapporto non essendo che il quoziente d'una divisione, può sempre esser posto sotto una forma frazionaria. Per questa causa il rapporto $\frac{18}{13}$ è lo stesso di $\frac{180}{130}$.

Le medesime considerazioni s'applicano ancora al secondo esempio. Il Corriere, che percorre 5 miriametri in 3 ore, farebbe un viaggio doppio in un tempo doppio, triplo in un tempo triplo; così 11 ore, numero ch'esprime il tempo, che questo Corriere ha impiegato nel percorrere 8 miriametri è $\frac{55}{3}$, oppure $\frac{55}{3}$ di miriametro, dee contenere 3 ore, numero che esprime il tempo che desso pone a percorrere 5 miriametri, tante volte quante $\frac{55}{3}$ contiene 5: i quattro numeri 5, $\frac{55}{3}$, 3, 11 son dunque in proporzione: ed infatti, se si divide $\frac{55}{3}$ per 5 avremo $\frac{55}{15}$; risultato equivalente a $\frac{11}{3}$. Sarà facile adesso di riconoscere tutti i casi, ove avrà luogo la proporzione tra quattro numeri.

112. Per indicare, che v'è proporzione tra i numeri 13, 18, 130, e 180, si scrivon essi nel modo seguente $13 : 18 :: 130 : 180$; e si enuncia *13 sta a 18 come 130 sta a 180*; il che vuol dire, che 13 è la medesima parte di 18 che il 130 la è di 180; ovvero che 13 è contenuto in 18 tante volte, quanto il 130 lo è in 180; oppur finalmente che il rapporto di 18 a 13 è lo stesso di quello di 180 a 130.

Il primo termine d'un rapporto si chiama *antecedente*, ed il secondo chiamasi *conseguente*. In una proporzione vi son due *antecedenti*, e due *conseguenti*, cioè, l'antecedente del primo rapporto, e quello del secondo; il conseguente del primo rapporto, e quel del secondo. Nella proporzione $13 : 18 :: 130 : 180$ gli antecedenti sono 13, e 130; i conseguenti sono 18, e 180.

Prenderò d'ora in avanti il conseguente del rapporto per il numeratore della frazione, la quale esprime il rapporto, e l'antecedente per denominatore.

113. Per assicurarsi che v'è proporzione tra i quattro numeri 13, 18, 130, e 180, bisogna vedere se le frazioni $\frac{18}{13}$, e $\frac{180}{130}$ sono eguali, e per questo ridur la

seconda alla sua espressione più semplice: ma si può ancora fare la medesima verificaazione osservando, che se le due frazioni $\frac{18}{13}$, e $\frac{180}{130}$ sono equivalenti, come

si suppongono, ne segue che riducendole al medesimo denominatore, il numeratore dell'una diverrà eguale a quello dell'altra; e che in conseguenza 18 moltiplicato per 130 darà il medesimo prodotto che 180 per 13. Quest'è ciò, che difatto ha luogo; ed il ragionamento, che ci ha condotti a conoscerlo, essendo indipendente dai valori particolari dei numeri, dimostra, che *se quattro numeri sono in proporzione, il prodotto del primo, e dell'ultimo, ovvero dei due estremi, è eguale a quello del secondo, e del terzo, ovvero dei due medj.*

Si vede nel tempo stesso che, se i quattro numeri proposti non fossero in proporzione, dessi non

avrebbero la proprietà enunciata di sopra; poichè la frazione, ch' esprime il primo rapporto, non essendo equivalente a quella, ch' esprime il secondo, il numeratore dell' una non diverrebbe eguale a quello dell' altra allorchè si riducono ambedue al medesimo denominatore.

114. La prima conseguenza, che si deduce naturalmente da ciò, che precede, è che si può cangiar l' ordine dei termini d' una proporzione purchè quello, che si stabilisce, sia tale che il prodotto degli estremi torni sempre eguale a quello dei medj. Nella proporzione $13 : 18 :: 130 : 180$ si possono dunque fare le disposizioni seguenti :

$$\begin{array}{l} 13 : 18 :: 130 : 180 \\ 13 : 130 :: 18 : 180 \\ 180 : 130 :: 18 : 13 \\ 180 : 18 :: 130 : 13 \\ 18 : 13 :: 180 : 130 \\ 18 : 180 :: 13 : 130 \\ 130 : 13 :: 180 : 18 \\ 130 : 180 :: 13 : 18 \end{array}$$

poichè in ciascuna di esse il prodotto degli estremi, ed il prodotto dei medj son sempre formati dai fattori medesimi. La seconda disposizione, nella quale i medj hanno cangiato di posto tra loro, è una di quelle, che si praticano più di sovente (*).

(*) Credo a proposito d' osservare, che la proporzione $13 : 130 :: 18 : 180$ sarebbesi presentata immediatamente sotto questa forma dietro alla soluzione medesima del Problema del numero 109; poichè si può avere il valore d' un metro di drappo in due maniere; cioè, dividendo il prezzo della pezza di 13 metri per 13, ovvero dividendo quello della pezza di 18 metri per 18. Segue dunque da ciò che il prezzo della prima dee contenere 13 tante volte quante il prezzo della seconda contiene 18; avremo dunque $13 : 130 :: 18 : 180$. Potrebbe ragionare nella stessa maniera sul secondo Problema del medesimo numero, come pure su tutti quelli di questo genere, e derivare da ciò le proporzioni; ma ho preferito il punto di vista del n. 109, perchè questo conduce a paragonare tra loro quantità della medesima specie, laddovechè qui bisogna paragonare i prezzi, i quali sono delle

115. Fa di mestieri osservare, che si possono moltiplicare, oppur dividere per un medesimo numero i due antecedenti, ovvero i due conseguenti d'una proporzione senza sturbarla; poichè il cangiamento sudddivisato fa dei due antecedenti il primo rapporto, e dei due conseguenti il secondo. Se s'avesse, per esempio, $55 : 21 :: 165 : 63$, cangiando i medj di posto avrebbesi $55 : 165 :: 21 : 63$; si potrebbero allora dividere i due termini, i quali formano il primo rapporto, per il numero 5 (111), il che darebbe $11 : 33 :: 21 : 63$; cangiando di nuovo i medj di posto, troverebbesi $11 : 21 :: 33 : 63$; proporzione, la quale è parimente vera, e che non differisce dalla proposta se non in ciò che i due antecedenti sono stati divisi per 5.

116. Poichè il prodotto degli estremi è eguale a quello dei medj, possiamo prendere uno di questi prodotti per l'altro; e siccome, dividendo il prodotto degli estremi per un estremo, troverebbesi necessariamente l'altro per quoziente, *bisognerà, che dividendo il prodotto dei medj per un estremo, si trovi parimente l'altro estremo.* Per la medesima ragione, *se si divide il prodotto degli estremi per uno dei medj conseguiremo l'altro medio.*

Possiamo dunque trovare un termine qualunque d'una proporzione allorchè si conoscono gli altri tre; poichè il termine cercato non può essere che uno degli estremi, oppure uno dei medj.

Il Problema del n°. 109. si risolve col mezzo d'una delle regole summentovate. Difatto, allorchè abbiamo riconosciuto, che i prezzi delle due pezze di drappo sono in proporzione co' numeri dei metri contenuti in ciascuna, si scrive nella maniera seguente questa proporzione

$$13 : 18 :: 130 : x$$

ponendo la lettera x per occupare il posto del prezzo

somme di danaro a dei metri, i quali sono misure di lunghezza; il che non può farsi se non che considerando gli uni, e gli altri come dei numeri astratti.

cercato della pezza di 18 metri ; e si trova questo prezzo , il quale è uno degli estremi , moltiplicando tra loro i due medj 18 , e 130 , il che dà 2340 , e dividendo questo prodotto per l'estremo cognito 13 ; si ha per risultato 180.

L'operazione , mediante la quale essendo dati tre termini qualunque d'una proporzione trovasi il quarto , si chiama *regola del tre*. Gli Autori della maggior parte dei Libri di Aritmetica l'hanno distinta in più specie ; ma questo apparato è inutile allorchè si è ben concepito in che cosa consista la proporzione , e che si è ben compreso l'enunciato del Problema proposto. Ciò sarà reso chiaro da alcune applicazioni.

117. Un Operaio avendo fatto 217mi , 5 di lavoro in 9 giorni , si dimanda quanto tempo impiegherebbe a farne 423mi , 9 supponendo ch'esso lavorasse sempre nella maniera medesima ?

In questo Problema l'incognita è un numero di giorni , il quale dee contenere i 9 giorni impiegati nel fare 217mi , 5 tante volte , quante 423 , 9 contiene 217 , 5 ; si ha dunque la proporzione seguente 217,5 : 423,9 :: 9 . x , e per x si trova 17,54.

118. Tutta la difficoltà dei Problemi , che si possono incontrare , non consiste che nella maniera d'intavolare la proporzione ; ed ecco delle regole sicure per formarla in tutti i casi.

Tra i quattro termini , i quali debbon comporre la proporzione , vi sono due numeri , che sono d'una medesima specie , e due numeri , i quali son pure d'una medesima specie , ma differente dalla prima. Nell'esempio precedente due dei termini esprimevan dei metri , e gli altri dei giorni.

Bisogna dunque primieramente distinguere i due termini di ciascuna specie ; e quando ciò sarà fatto , avrem necessariamente il quoziente del maggior termine della seconda specie diviso pel minor termine di questa specie , eguale al quoziente del maggior termine della prima specie diviso per il minore di questa specie ; il che darà la seguente proporzione ;
Il minor termine della prima specie.

sta

al maggior termine di questa specie
come

il minor termine della seconda specie
sta

al maggiore di questa specie.

Nell'esempio precedente questa regola dà immediatamente $217,5 : 423,9 :: 9 : x$; perchè il termine incognito debb'esser maggior di 9, a causa ch'è necessario un maggior numero di giorni quanto più è maggiore il lavoro da farsi.

119. Se fosse proposto di trovar quanti giorni impiegherebbero 27 Operaj per eseguire un lavoro, che 15 Operaj, i quali lavorassero tanto quanto i primi, hanno fatto in 18 giorni, vedrebbe che bisognano tanti giorni di meno quanto più è maggiore il numero degli Operaj, e viceversa. Ha luogo la proporzione anco in questo caso, ma in un ordine inverso: poichè, se il numero degli Operaj della seconda partita fosse, per esempio, triplo del numero di quei della prima, non bisognerebbe loro che il terzo del tempo impiegato da questi ultimi: sarebbe dunque il primo numero di giorni, il quale dovrebbe contenere il secondo tante volte quante il secondo numero d'operaj contiene il primo.

L'ordine, nel quale queste quantità si contengono, essendo l'inverso di quello, che loro è stato assegnato dall'enunciativa del Problema, si dice che i due numeri d'Operaj sono in *ragione inversa* dei numeri de' giorni. Se si paragonassero i due primi, ed i due ultimi nell'ordine, in cui dessi presentansi, il rapporto degli uni sarebbe 3, ovvero $\frac{3}{1}$, e quello degli altri sarebbe $\frac{1}{3}$, frazione inversa di $\frac{3}{1}$.

Si vede infatti chiaramente, che si rovescia un rapporto rovesciando la frazione, che l'esprime; poichè in tal maniera si fa passare l'antecedente nel posto del conseguente, ed il conseguente nel posto dell'antecedente; $\frac{3}{2}$ oppure $2 : 3$ è l'inverso di $\frac{2}{3}$, o s'ovvero di $3 : 2$.

La regola del numero precedente semplifica molto queste considerazioni; poichè prendendo i due numeri d'Operai per le quantità della prima specie, i due numeri dei giorni per quelle della seconda, e ponendo le une, e le altre secondo il lor ordine di grandezza, si ha questa proporzione.

$$15 : 27 :: x : 18$$

dalla quale ricavasi x uguale a 10.

120, Ecco ancora alcuni esempi per esercitare il Lettore.

1.° Un Uomo ha posto 3575 fr. in un traffico a ragione del 5 per cento d'interesse l'anno: si domanda a quanto debbe ammontare, alla fine d'un anno, l'interesse del suo capitale?

L'espressione 5 per 100 d'interesse, la quale scrivesi in questa maniera, 5 per $\frac{0}{100}$, significa che una somma di 100 fr. riporterebbe 5 fr. alla fine d'un anno; prendendo dunque i due capitali per le quantità della prima specie, e gl'interessi per quelle della seconda, avremo

$$100 : 3575 :: 5 : x.$$

proporzione, la quale riducesi a $20 : 3575 :: 1 : x$, dietro all'osservazione del num. 115; dividendo altresì i due termini del primo rapporto per 5, trovasi finalmente

$$4 : 715 :: 1 : x$$

dalla quale ricavasi x eguale a $2\frac{15}{4}$, ovvero a 178fr., 75.

Si può ancora risolvere questo Problema osservando, che 5 sono $\frac{1}{20}$ di 100, e che in conseguenza avrem l'interesse d'una somma qualunque a questo frutto prendendo il ventesimo di questa somma: ora $\frac{1}{20}$ di 3575 è 178fr., 75; risultato conforme a quello, che abbiamo di già trovato di sopra

2.° Un Mercante ha promesso di pagare 800 fr. in un anno; non potendo aspettare questo termine, la sua cambiale vien passata ad un Bauchiere otto me-

si avanti l'epoca del pagamento: si domanda quante debba dare il Banchiere? Quest'ultimo, avendo pagato una somma, la quale egli non dee ritirare che dopo otto mesi, bisogna necessariamente che trovi nel rimborso, che gli sarà allora fatto; l'interesse del suo denaro.

L'interesse per un anno sia di 6 per 100; l'interesse per otto mesi ne sarà gli $\frac{8}{12}$, ovvero i $\frac{2}{3}$; dunque una somma di 100 fr. prestata per otto mesi dee produrre 4. fr. d'interesse e vale a dire, che quello, il quale l'ha ricevuta in prestito, dee rendere 104 fr. La somma di 800 fr. anticipata dal Banchiere non essendo che un simile rimborso, avremo questa proporzione;

$$104\text{fr.} : 100\text{fr.} :: 800 : x$$

dalla quale ricaveremo 769fr., 23 per il valore di x , cioè, per la somma, che dee pagare il Banchiere (*).

Regola del tre composta

121. La regola del tre si applica ancora a dei Problemi, nei quali il rapporto della quantità cercata alla quantità data della medesima specie dipende da più circostanze, che fa di mestieri combinare, e preude allora il nome di *regola del tre composta*. Eccone alcuni esempj.

Suppongo che si dimandi quanti miriametri percorrerebbe in 17 giorni un viaggiatore camminando 10 ore per giorno, allorchè si sa ch'esso ha impiegato 29 giorni nel percorrere 112 miriametri camminando 7 ore per giorno.

(*) L'operazione qui sopra enunciata, la quale si chiama *regola di sconto*, riducesi ordinariamente a prelevare l'interesse della somma intera portata sulla Cambiale; lo che non corrisponde allo stato della questione; e non è perciò esatta. Nel nostro esempio, l'interesse del 4 per 100 ascenderebbe a 32fr.: dunque il Banchiere non pagherebbe che 768fr.

In questa maniera lo sconto è preso al di fuori; nella altra è al di dentro della Somma portata sulla Cambiale.

Questo Problema può risolversi in due maniere: ecco quella, che dà luogo alla regola del tre composta.

Il numero dei miriametri percorsi in ciascun caso dipende da due circostanze, cioè, dal numero dei giorni di cammino del viaggiatore, e dal numero d'ore, che desso viaggia in ciaschedun giorno.

Possiamo primieramente far astrazione da quest'ultima circostanza, e supporre che il numero d'ore sia lo stesso nel secondo caso come nel primo. Allora il Problema sarebbe posto così. *Un Viaggiatore ha impiegato 29 giorni nel trascorrere 112 miriametri; quanti ne trascorrerebb' esso in 17 giorni; ed avrebbesi la proporzione.*

$$29 : 17 :: 112 : x.$$

Il quarto termine sarebbe eguale a 112 moltiplicato per 17, e diviso per 29, ovvero $\frac{1904}{29}$ miriametri.

Adesso, per aver riguardo alla differenza dei numeri d'ore del viaggio, direbbesi: *Se camminando 7 ore il giorno, per un certo numero di giorni, questo viaggiatore ha percorso $\frac{1904}{29}$ miriametri, quanti desso ne percorrerebbe nel medesimo tempo se caminasse 10 ore per giorno? il che condurrebbe alla proporzione seguente:*

$$7or. : 10or. :: \frac{1904}{29} \text{ miriametri} : x$$

di cui il quarto termine darebbe 93, 793 per il numero dei miriametri domandato.

Il Problema risolverebbesi ancora osservando che 29 giorni di viaggio, a 7 ore per giorno, equivalgono a 203 ore di viaggio; che 17 giorni di viaggio, a 10 ore per giorno, danno 170 ore; e che in conseguenza il Problema è ridotto a questa proporzione:

$$203or. : 170or. :: 112mir. : x$$

mediante la quale si trova il viaggio, che dee fare il viaggiatore in 170 ore, in seguito di quel che desso ha fatto in 203 ore.

122. Secondariamente, se 9 operaj, lavorando 8 ore per giorno, hanno impiegato 24 giorni a scavare

un fosso di 65 metri di lunghezza, sopra 13 di larghezza, e 5 di profondità, quanti giorni sarebbero necessarij a 71 operaj della medesima forza dei primi e che lavorassero 11 ore per giorno, per escavare un fosso di 327 metri di lunghezza, sopra 18 di larghezza, e 7 di profondità?

Ecco pure un Problema in apparenza assai complicato, e che si risolve egualmente colla regola del tre.

Se tutto, ad eccezione del numero dei giorni, e del numero degli uomini, fosse eguale nei due casi enunciati, il Problema ridurrebbesi a trovare quanti giorni sarebbero necessarij a 71 uomini per far il lavoro, ch'è stato eseguito da 9 uomini in 24 giorni; avrebbesi dunque (110)

$$9 :: 71 :: x :: 24$$

ma quì, in luogo di calcolare il numero dei giorni, mi contento d'indicare, come nel num.^o 70, i numeri da moltiplicarsi tra loro, e di porre nel denominatore quelli, pei quali bisogna dividere: in tal maniera ho per il numero x dei giorni.

$$\frac{24 \text{ per } 9}{71}$$

Ma i primi operaj non lavorando che 8 ore per giorno; laddovechè i secondì lavorano per 11 ore, saran necessarij dei giorni di meno a questi ultimi; avrem dunque

$$8 :: 11 :: x :: \frac{24 \text{ per } 9}{71}$$

da cui ne concluderemo che il numero dei giorni in tal circostanza è

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8}{71 \text{ per } 11}$$

Questo numero è quello dei giorni necessarij a 71 operaj, che lavorano 11 ore per giorno, per escavare il primo fosso.

I fossi essendo di lunghezze ineguali, saran necessarij tanti giorni di più quanto il secondo sarà più lungo del primo; così averemo.

$$65 :: 327 :: \frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8}{71 \text{ per } 11} :: x$$

ed il numero dei giorni relativi a questa nuova circostanza sarà

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65}$$

Avendo riguardo alle larghezze, le quali non sono le medesime in ambedue i fossi, ho

$$13 :: 18 :: \frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65} : x$$

ed in conseguenza il numero dei giorni cercato si cangia

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13}$$

Finalmente, le profondità essendo differenti, si ha

$$5 : 7 :: \frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 8}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13} : x$$

ed il numero dei giorni risultante dal concorso di tutte le circostanze è

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5}$$

Effettuando le moltiplicazioni, e le divisioni, arriveremo al risultato cercatosi 21 giorni $\frac{1902931}{3299725}$.

123. Questo numero è eguale a 24 moltiplicato per la quantità frazionaria

$$\frac{9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5};$$

ma quest' ultima quantità, ch' esprime il rapporto del numero dei giorni dato al numero dei giorni cercato, è dessa pure il prodotto delle frazioni seguenti

$$\frac{9}{71}, \frac{8}{11}, \frac{327}{65}, \frac{18}{13}, \frac{7}{5},$$

ora, risalendo alle denominazioni dei numeri dati nel-

l' enunciato del Problema, si scorge che $\frac{9}{71}$ è l' in-

verso del rapporto dei numeri degli uomini, il quale, preso nell' ordine dell' enunciato sarebbe di 9 a 71 poichè vi sono 9 uomini nel primo caso, e 71 nel

secondo; $\frac{8}{11}$ e parimente l' inverso del rapporto dei

numeri d' ore , in cui ciascuna brigata d' operaj dee lavorare ;

$$\begin{array}{r} 327 \quad 18 \\ 65, 13, \text{ e } 7 \\ 5 \end{array}$$

sono i rapporti diretti delle lunghezze , delle larghezze e delle profondità dei due fossi. Segue da ciò , che il rapporto del numero dei giorni dato al numero de' giorni cercato è eguale al prodotto di tutti i rapporti diretti , e di tutti i rapporti inversi , che risultano dal paragone dei termini relativi a ciascuna delle circostanze del Problema.

Risolveremo il Problema semplicissimamente valutando in primo luogo ciascuno di questi rapporti : poichè moltiplicando tra loro le frazioni , che gli esprimono , formeremo quella , che rappresenta il rapporto della quantità cercata alla quantità data della medesima specie.

Quest' ultima frazione , la quale sarà il prodotto di tutti i rapporti , i quali entrano nel Problema , avrà per numeratore il prodotto di tutti i loro antecedenti , e per denominatore quello di tutti i lor conseguenti.

Un rapporto , che resulta così dalla moltiplicazione di più altri , si chiama *rapporto composto*.

Ponendo l' espressione frazionaria

$$\frac{9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5}$$

sotto la forma d' un sol rapporto , ricaveremo col numero 24 dei giorni dati la proporzione seguente ;

$$71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5$$

$$: 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7 : : 24 : x$$

la quale è facile ad imitarsi in tutti i casi consimili.

Regola di Compagnia

124. Questa regola ha per oggetto di dividere un numero in parti , che abbiano tra loro dei rapporti dati ; vedremo nell' esempio seguente la sua origine , e di dov' essa abbia ricavato il suo nome.

Tre mercanti si sono associati per un traffico : il primo ha posto 25000 fr. , il secondo 18000 , ed il terzo 42000 ; essi separansi , e voglion dividere tra

loro il beneficio comune, il quale ascende a 57225 fr. : si domanda quanto ciascun debba avere per la sua parte?

A fin di risolvere questo Problema, fa di mestieri considerare che il guadagno di ciascuno di essi debb'esser composto col guadagno totale come il suo fondo lo è colla somma dei fondi o col fondo totale; poichè quello, che avesse somministrato da sè solo la metà, o il terzo di questo fondo, per esempio, avrebbe evidentemente diritto alla metà, o al terzo del guadagno. Nell'esempio proposto la somma dei fondi formando 85000 fr.; i fondi particolari ne saranno rispettivamente i

$$\frac{25000}{85000}, \quad \frac{18000}{85000}, \quad \frac{42000}{85000};$$

e moltiplicando per queste frazioni il guadagno totale 57225 fr. otterremo il guadagno relativo a ciascun fondo. E' manifesto d'altronde che la somma delle parti uguaglierà il guadagno totale, poichè la somma delle frazioni qui sopra seguate, avendo il suo numeratore eguale al suo denominatore, è necessariamente eguale all'unità.

Le operazioni indicate qui sopra somministrano le proporzioni

85000 : 25000 :: 57225 : al guadagno del 1.º merc.;

85000 : 18000 :: 57225 : al guadagno del 2.º;

85000 : 42000 :: 57225 : al guadagno del 3.º,

le quali possono enunciarsi così:

il fondo totale : un fondo particolare ::

il guadagno totale : al guadagno particolare.

Semplificando i primi rapporti di ciascuna di queste tre proporzioni si ha

85 : 25 :: 57225 : al guadagno del 1.º,

ovvero 16830 fr. $\frac{75}{85}$

85 : 18 :: 57225 : al guadagno del 2.º,

ovvero 12118 fr. $\frac{20}{85}$

85 : 42 :: 57225 : al guadagno del 3.º,

ovvero 28175 fr. $\frac{75}{85}$

Se tutti i fondi fossero eguali, l'operazione ri-

durrebbersi a dividere il guadagno totale pel numero dei fondi: si riduce il Problema sotto a questo punto di vista nell' esempio proposto concependo il fondo totale 85000 fr. diviso in 85 fondi parziali, ovvero *azioni*, di 1000 fa.; il guadagno di ciascuno di questi fondi debb' evidentemente essere la 85^{ma} parte del guadagno totale, ed altro non resta che a moltiplicar successivamente questa parte per 25, 18, e 42, considerando i fondi 25000 fr., 18000 fr., 42000 fr., come le riunioni di 25 azioni, di 18 azioni, e di 42 azioni.

E' bene sapere che in termini di commercio il fondo totale chiamasi *capitale*, ed il guadagno da dividersi *dividendo*.

Il Problema seguente ha molta analogia con quello che abbiamo ora sciolto.

125. Si domanda di spartire un'eredità di 67250 fr. fra tre eredi, in modo che la porzione del secondo sia $i \frac{2}{5}$ di quella del primo, e che la porzione del terzo sia $i \frac{7}{8}$ di quella del secondo.

E' manifesto che la parte del terzo, paragonata e quella del primo, ne sarà $i \frac{7}{8}$ dei $\frac{2}{5}$, ovvero $i \frac{14}{40}$; oppure $i \frac{7}{20}$; queste tre parti cercate saranno dunque tra loro nei rapporti medesimi dei tre numeri 1, $\frac{2}{5}$, e $\frac{7}{20}$. Riducendo questi ultimi al medesimo denominatore, troveremo $\frac{20}{20}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{7}{20}$, ed avremo i tre numeri 20, 8, 7, i quali saranno proporzionali ai primi; ma la lor somma essendo 35, si vede che, se si prendon tre parti, le quali siano espresse dalle frazioni $\frac{20}{35}$, $\frac{8}{35}$, $\frac{7}{35}$, desse saranno tra loro nei domandati rapporti: il Problema sarà dunque risoluto prendendo $i \frac{20}{35}$, poi gli $\frac{8}{35}$, poi $i \frac{7}{35}$ di 67250 fr.; il che darà le somme dovute agli eredi secondo la distribuzione prescritta, cioè

38428 fr. $\frac{20}{35}$, 15371 fr. $\frac{15}{35}$, e 13451 fr.

126. Finalmente sian due fontane, di cui la prima, versando da sè sola per 2 ore $\frac{1}{2}$, riempie una certa vasca, e la seconda riempie questa medesima vasca versando sola per 3 ore $\frac{3}{4}$: si domanda quanto tempo sarà necessario perchè la detta vasca sia ripiena facendo versar simultaneamente le due fontane?

Cerco qual porzione della vasca la prima fontana riempie in un tempo dato, per esempio, in un' ora, e vedo che prendendo la capacità di questo bacino per unità, altro non debbo far che dividere 1 per 2 $\frac{1}{2}$, ovvero $\frac{5}{2}$, il che dà $\frac{2}{5}$ per la porzione cercata. Dividendo parimente 1 per 3 $\frac{3}{4}$ ovvero $\frac{15}{4}$, ottengo $\frac{4}{15}$ per la porzion della vasca, che la seconda fontana riempie in un' ora: le due fontane versando insieme riempiranno in conseguenza i $\frac{2}{5}$ più i $\frac{4}{15}$, ovvero i $\frac{10}{15}$ della vasca in 1 ora dividendo dunque 1, ovvero la capacità della vasca, per $\frac{10}{15}$, avremo il numero delle ore, che saran necessarie per riempirla in questa maniera, e troveremo in tal modo $\frac{10}{15}$, ovvero 1 $\frac{1}{3}$ ora e mezza.

Gli autori, che hanno scritto sull'Aritmetica; hanno moltiplicati, e variati questi Problemi in molte maniere. ed hanno stabilito in regole i metodi, i quali conducono a risolverli; ma tutti questi precetti sono quasi inutili; poichè un Problema di questo genere è sempre facilmente risoluto da quello, che sa sviluppare le conseguenze dell'enunciato, soprattutto quand'ei può ajutarsi col soccorso dell'Algebra: ecco perchè io non mi tratterò d'avvantaggio.

127. A guisa delle Proporzioni, le quali sono composte di quattro numeri, di cui i due primi si contengono tante volte quante i due ultimi, si è consi-

derato l'insieme dei quattro numeri tali come 2, 7, 9, 14, di cui il secondo sorpassa il primo di tanto quanto il quarto sorpassa il terzo: questi numeri che si posson chiamare *equidifferenti*, godono d' una proprietà riguardevole, analoga a quella della proporzione; poichè la somma dei termini estremi 2 e 14 è eguale a quella dei medj 7, e 9 (*).

Per provar questa proprietà in generale, bisogna osservare che il secondo termine è eguale al primo, più la differenza, e che il quarto è eguale al terzo più la differenza; dal che ne segue che la somma degli estremi, composta del primo, e del quarto termine, sarà eguale al primo più il terzo, più la differenza. Parimente la somma dei medj, composta del secondo, e del terzo termine, sarà eguale al primo più la differenza più il terzo. Queste due somme, essendo composte delle medesime parti, sono in conseguenza eguali.

Ho supposto che il secondo, ed il quarto termine fossero maggiori del primo, e del terzo; il contrario potrebbe aver luogo come nei quattro numeri 8, 5, 15, 12: allora il secondo termine sarebbe eguale al primo meno la differenza, ed il quarto sarebbe eguale al terzo meno la differenza. Cangiando la pa-

(*) Gli antichi avevan benissimo separata la Teoria delle Proporzioni dalle operazioni dell' Aritmetica. Euclide dà questa Teoria nel quinto Libro dei suoi Elementi; e siccome egli applica le proporzioni alle linee, è verisimilmente da ciò che desse hanno preso in seguito il nome di *proporzioni geometriche* e che si è dato il nome di *proporzioni Aritmetiche* all'insieme dei numeri equidifferenti, della quale niuno si è occupato che molto più tardi. Queste denominazioni sono viziosissime; la parola *proporzione*, nel nostro linguaggio, ha un senso determinato, il qual non conviene per niente ai numeri equidifferenti. D' altronde la proporzione, che si chiama *geometrica*, non è meno *aritmetica* di quella, che porta esclusivamente tal nome. Lagrange, nelle sue Lezioni alla Scuola Normale, ha rettificato il linguaggio a questo riguardo, ed io ho seguito il suo esempio.

L' *equidifferenza*, ovvero l'insieme di quattro numeri equidifferenti, oppur finalmente la *proporzione aritmetica* si scrive così 2. 7. 9. 14.

rola più in meno nel precedente ragionamento, proverebbesi ancora che nel caso attuale la somma degli estremi è eguale a quella dei medj.

Non ispingerò più avanti questa Teoria dei numeri equidifferenti, perchè dessa non può essere d'alcun uso presentemente.

Regola d' alligazione

128. Io non ometterò la *regola d' alligazione*, il fin della quale si è di trovare il valore medio di più cose della medesima specie, ma di prezzi diversi: gli esempj seguenti la faranno sufficientemente conoscere.

Un mercante ha comprato più specie di vini, vale a dire,

130 bottiglie a 10 decimi l' una

75 a 15

231 a 12

27 a 20 ;

desso le mescola in seguito: si domanda quanto gli costa una bottiglia del vin mescolato? È facil vedere che altro non dovrà farsi che valutare ciò, che gli costa la totalità della mescolanza, quante bottiglie essa forma, e dividere in appresso il primo di questi risultati per il secondo, onde avere il prezzo cercato.

Ora, le 130 bottiglia a 10 decimi fanno 1300 decimi

75 a 15 fanno 1125

231 a 12 fanno 2772

27 a 20 fanno 540

dunque 463 bottiglie costano 5737 decimi.
Dividendo 5737 per 463, il quoziente 12,39 è il prezzo d' una bottiglia della mescolanza.

129. Ci serviam pure della regola precedente a fine di prendere un medio tra diversi risultati dati dall' esperienza, o dall' osservazione, e che non s' accordano tra di loro. Se si trattasse, per esempio, di conoscere esattamente la distanza di due punti assai lontani, e che questa si misurasse, per quanta cura si portasse, in quest' operazione, vi sarebbe sempre un poco d' incertezza nel risultato a motivo degli errori,

che si commettono necessariamente nella maniera di posare le Misure successivamente l' uno dopo dell' altre.

Suppongo dunque che siasi ripetuta quest' operazione più volte di seguito per verificarla, e che due volte siasi trovata di 3794mi, 48; che tre altre misurazioni abbian dato 3795mi, 27; che siasi ottenuto finalmente un ultimo risultato di 3793mi, 115: questi diversi numeri non essendo gli stessi, è evidente che vi è errore in alcuni di loro, e probabilmente in tutti; laonde, per diminuirlo, ecco come ragionasi. Se si fosse ottenuta ciascuna volta la vera misura, la somma dei risultati sarebbe eguale a sei volte questa misura; ed è manifesto che la medesima cosa avverrebbe ancor luogo se i risultati ottenuti peccassero gli uni per difetto, gli altri per eccesso, di maniera che l' aumento prodotto dalla somma degli eccessi compensasse ciò che manca ai risultati minori del vero valore: arriverebbesi dunque in quest' ultimo caso, alla vera misura, dividendo la somma dei risultati per il loro numero.

Questo caso è troppo particolare per potere sperar che s'incontri frequentemente; ma quasi sempre accade che gli errori in un senso distruggono una parte di quelli nel senso opposto; e ciò, che resta, trovandosi repartito egualmente sopra ciascuno dei risultati, è tanto più diminuito quanto più il numero dei risultati è maggiore.

Dietro a queste considerazioni, opereremo nel modo seguente.

Prenderemo 2 volte	3794,48	ovvero	7588,96
3 volte	3795,27	ovvero	11385,81
1 volta	3793,115	ovvero	3793,115

i 6 risultati somministrano in tutto 22767,885. Dividendo 22767,885 per 6, troveremo che il valor medio della distanza cercata è 3794mi, 647.

Del rimanente bisogna ricorrere al calcolo delle probabilità per discutere, ed apprezzare i vantaggi, e gl' inconvenienti di questo metodo; e sì fatto argomento ha occupato i più grandi Geometri del nostro Secolo.

*Del paragone delle diverse misure
del medesimo genere.*

130. L'uniformità delle Misure era sin da gran tempo l'oggetto dei voti di tutti i dotti allorchè fu stabilito in Francia il Sistema decimale^o, che ho esposto di sopra (100); ma questo Sistema non essendo ancora adottato dalle Nazioni straniere, e succedendo ad un antico Sistema, mediante il quale sono stati espressi molti risultati numerici importanti, abbiamo spesso bisogno di paragonare colle misure decimali tanto le antiche Misure Francesi, quanto le Misure straniere. Vado in conseguenza a indicare i mezzi di far questa comparazione.

I dati necessarj sono i rapporti delle misure da paragonarsi. Questi rapporti s'ottengono esprimendo una delle Misure per mezzo dell'altra.

131. Le misure lineari le più usitate in Francia erano la *tesa*, e l'*auna*.

La tesa si divide in 6 piedi;

Il piede in 12 pollici;

Il pollice in 12 linee;

La linea in 12 punti

L'auna (di Parigi) contiene 3 piedi, 7 pollici, 10 linee $\frac{5}{6}$. Paragono in primo luogo la tesa al metro.

Il metro determinato *definitivamente*, è stato trovato di 3 piedi, 0 pollici, 11 linee; 296.

Questo numero, essendo ridotto a frazion della tesa, dà il rapporto del metro alla tesa.

Per far questa riduzione, bisogna primieramente convertire i piedi in linee, il che si farà osservando che siccome il piede equivale a 12 pollici, 3 piedi fanno 36 pollici; e siccome il pollice equivale a 12 linee, moltiplicheremo 36 per 12, il che darà 432 per il valor di 3 piedi convertiti in linee, alle qua, li bisognerà aggiungere le linee 11, 296.

Da un altro lato la tesa, composta di 6 piedi, contiene 6 volte 12 pollici, e 72 volte 12 linee, ov-

vero 864 linee. La tesa contenendo dunque 864 linee, mentre che il metro ne contien solamente 443, 296, il rapporto del metro alla tesa è quello dei numeri 443, 296, e 864, o sìvvero dei numeri 443296, e 864000, mille volte maggiori dei precedenti. La tesa è dunque gli $\frac{864000}{443296}$ del metro; frazione, che si riduce a $\frac{27000}{13853}$, dividendo i suoi due termini per 32.

132. Segue da ciò, e dal n. 75 che per convertire un numero qualunque di tese in metri, bisogna moltiplicarlo per la frazione $\frac{27000}{13853}$

Si dimanda, per esempio, 43 tese a quanti metri equivalgono? il risultato è $\frac{1161000}{13853}$; estraendo gl'

interi da questa frazione, s'ottiene $83\frac{11201}{13853}$; e riducendo in decimali la frazione, che accompagna l'intero, si ha 82,80856.

Siccome è sufficiente, per gli usi ordinari, una riduzione approssimativa, è comodo il convertire immediatamente in decimali la frazione $\frac{27000}{13853}$, il che

dà pel valore della tesa 1mo, 94904; e moltiplicando questo numero per quello delle tese proposte, effettueremo immediatamente la lor conversione in metri.

133. I piedi, i pollici, le linee, il rapporto dei quali colla tesa è già cognito, si convertono facilmente in parti decimali del metro.

1. Il piede, essendo la sesta parte della tesa, equivarrà alla sesta parte della frazione $\frac{27000}{13853}$, ovvero $\frac{4500}{13853}$ del metro, ed in decimali a omi, 32484, ovvero 3dmi, 2484.

2. Il pollice, essendo la dodicesima parte del piede, sarà equivalente alla dodicesima parte della frazione, $\frac{4500}{13853}$, ovvero a $\frac{375}{13853}$ di metro, ed in decimali a omi, 02707, ossia 2mi, 707,

3. La linea, essendo la dodicesima parte del pol-

lice, equivarrà alla dodicesima parte della frazione $\frac{375}{13853}$, ovvero a $\frac{125}{55413}$ del metro, ed in decimali a omi, 00226, ossia 2mi, 26.

Si otterrebbe nella stessa maniera il valore del punto.

134. Non vi è cosa più facile adesso che di ridurre a metri, ed a parti decimali del metro un numero qualunque di tese, piedi, e pollici. Sian per esempio, 13 tese, 5 piedi, 3 pollici, e 8 linee.

Le 13 tese danno 25,mi33752

I 5 piedi 1, 62420

I 3 pollici 0, 08121

Le 8 linee 0, 01808

Totale . . . 27, 06101.

135. L' auna di Parigi, contenendo 3 piedi, 7 pollici, 10 linee $\frac{5}{6}$, ridotta in linee, riducesi alla frazione $\frac{3161}{5184}$ della tesa; e la tesa essendo i $\frac{27000}{13853}$ del metro, l' auna sarà i $\frac{3161}{5184}$ di $\frac{27000}{13853}$ del metro; il che riducesi, in decimali, a 1mo, 18845,

136. Il peso si misurava in Francia nel tempo passato in libbre, marchi, oncie, grossi, grani, e frazioni di grano.

La libbra è composta di 2 marchi

Il marco di 8 oncie

L' oncia di 8 grossi

Il grosso di 72 grani.

E' stato trovato, mercè d' esperienze delicatissime, che il chilogrammo pesa 18627 grani. Convertendo questo numero in frazioni della libbra, come io l' ho fatto a riguardo di quello, ch' esprime il metro per il piede, avremo il rapporto della libbra al chilogrammo, e ne dedurremo da ciò i rapporti delle suddivisioni della libbra con le parti decimali del grammo.

Troveremo 1. Che la libbra è i $\frac{9216}{18827}$ del chilogrammo, ovvero 0048, 48951 in decimali;

2. Che l'oncia, ovvero la sedicesima parte della libbra, equivale a $\frac{576}{18627}$ di chiliogrammo, ovvero ochil, 03059 in decimali.

3. Che il grosso ovvero l'ottava parte dell'oncia, equivale a $\frac{7^2}{18827}$ di chiliogrammo, ovvero ochil, 00382 in decimali.

4. Che il grano, ovvero la settantaduesima parte del grosso, equivale a $\frac{1}{18827}$ di chiliogrammo, ossia ochil, 00005 in decimali.

Con questi risultati nulla è più agevole che convertire in misure decimali un peso qualunque espresso colle antiche Misure, Sian, per esempio, 23 libbre, 4, oncie, 5 grossi, e 31 grani.

Si ha per 23 libbre 11chil., 25873
 per 4 oncie 0, 12236
 per 5 grossi 0, 01910
 per 31 grani 0, 00165

Totale. . . , 11chil., 40184

137. L'Unità monetaria dell'antico Sistema era la *lira tornese*. Il valor d'un franco, dato dalla moneta di 5 fr., essendo stato paragonato a quel della lira tornese, data dallo scudo di 6 lire, n'è risultato, che il valore del franco sta a quel della lira tornese come 81 a 80. Per convertir dunque una somma

di lire totnesi in franchi, bisognerà prenderne, ovvero moltiplicarla per 0.98765.

Reciprocamente, per valutare una somma di franchi in lire totnesi, bisognerà prenderne $\frac{81}{80}$, ovvero moltiplicarla per 1.0125.

Se la somma da ridursi fosse 100 franchi, otterrebbe 101.25, ovvero 101 lire $\frac{1}{4}$.

La lira tornese si divide in 20 soldi, ciascun soldo in 12 denari. Nell'uso ordinario si confonde la lira col franco. In quest'ipotesi, la quale non è che approssimativa ciascun soldo equivale a $\frac{1}{2}$ decimo, ovvero 0,05; ed un denaro, essendo la dodicesima parte del soldo, equivale a $\frac{1}{12}$ di 0,05, ovvero 0,0041666 ec.

Per facilitare le conversioni delle antiche Misure in nuove, si son riuniti in alcune Tavole poste alla fine di questo Trattato i risultati ottenuti nel n° 133, come nel precedente, con tutti quelli, che si troverebbero paragonando nella stessa maniera le Misure corrispondenti dell'antico Sistema; e del Sistema metrico decimale. Vi son pure uniti i rapporti delle principali Misure, e Monete forestiere con quelle del Sistema medesimo.

138. Nella stessa maniera che, pel rapporto dell'auna alla tesa, ho paragonato quella prima Misura col metro, avrei parimente potuto paragonare ancora col metro tutte le misure straniere, il rapporto delle quali colle nostre antiche è già conosciuto. L'esempio seguente, benchè fittizio, servirà per porre in istato d'applicare il metodo a tutti i casi; i quali possano presentarsi, e darà un'idea della *regola congiunta*, la quale spesso si pratica nelle operazioni riguardanti il *canbio* delle monete.

Supposto che 3 *lire* di Francia equivalgano a 32 *denari sterlini* d'Inghilterra; che 240 *denari sterlini* equivalgano a 408 *denari di grosso* d'Olanda; che 50 *denari di grosso* d'Olanda equivalgano a 190 *maravedis* di spagna: si domanda quanti *maravedis* fanno 90 *lire* di Francia?

1. Poichè 3 *lire* di Francia fanno 32 *denari sterlini*, la *lira* è $\frac{32}{3}$ di *denaro* *sterlino*.

2. Poichè 240 *denari sterlini* equivalgono a 408 *denari di grosso*, il *denaro sterlino* è $\frac{408}{240}$ di *denaro di grosso*.

3. Poichè 50 denari di grosso equivalgono a 190 maravedis, il denaro di grosso è i $\frac{190}{50}$ di maravedis.

Si convertirà dunque la lira di Francia in maravedis prendendo i $\frac{32}{3}$ dei $\frac{408}{240}$ dei $\frac{190}{50}$; il che somministrerà.

$$\frac{32 \text{ per } 408 \text{ per } 190}{3 \text{ per } 240 \text{ per } 50}$$

per il rapporto della lira al maravedis: e moltiplicando questo rapporto per 90, avremo il valore di 90 lire di Francia, espresse in maravedis, e vale a dire.

$$\frac{90 \text{ per } 32 \text{ per } 408 \text{ per } 190}{3 \text{ per } 240 \text{ per } 50}$$

Questo numero frazionario è capace d'un'espressione molto più semplice, perchè il numeratore, e il denominatore han dei fattori comuni. Nel primo 90, e 190 son divisibili per 10; lo stesso succede di 240, e 50 nel secondo; ed essendo eseguita la divisione, otterremo.

$$\frac{9 \text{ per } 32 \text{ per } 408 \text{ per } 19}{3 \text{ per } 24 \text{ per } 5}$$

Ma 32 nel numeratore essendo divisibile per 8, come pure 24 nel denominatore, avremo

$$\frac{9 \text{ per } 4 \text{ per } 408 \text{ per } 19}{3 \text{ per } 3 \text{ per } 5}$$

e siccome 3 per 3 fa 9, potremo sopprimere questo fattore ad un tempo nel numeratore, e nel denominatore, e ne risulterà

$$\frac{4 \text{ per } 408 \text{ per } 19}{5}$$

ovvero 6201 $\frac{3}{5}$ maravedis per 90 lire di Francia.

Del calcolo dei numeri complessi.

139. I numeri , che contengono insieme *tese* , *pie*di , *pollici* , *linee* , e *punti* ; o *libbre* , *oncie* , *grossi* , e *grani* ; o *lire* , *soldi* , e *denari* , trovandosi rapportati a delle unità differenti, e la loro espressione essendo composta di più parti , sono stati chiamati *numeri complessi* : quelli , che non ne contengono che una sola , son chiamati *incomplessi* (*). Si effettuano immediatamente sopra i numeri complessi le quattro operazioni fondamentali dell' Aritmetica con dei metodi , che spiegherò adesso , per porre in istato di seguitare gli antichi calcoli , benchè sia da desiderarsi che si renunzi totalmente a delle operazioni, alle quali sono sostituite tanto felicemente i decimali.

Ciò , ch' io dirò sopra i numeri complessi usati in Francia , applicherebbesi senza pena a tutti quelli , che possono risultare dalle Misure strauiere , e dalle loro suddivisioni.

Della somma dei numeri complessi.

140. La somma dei numeri complessi riposa sopra i medesimi principj di quella dei numeri *incomplessi*: si tratta sempre di riunire tra loro delle parti del valore medesimo ; ed allorchè se ne troua tante per formare una , o più parti d' un ordine superiore , si ritengon quest' ultime per comprenderle nella somma di quelle , che sono scritte nei numeri proposti , nello stesso modo che nella somma semplice si riportano le dieciue d' un a colonna sulla seguente a sinistra. Debbonsi dunque disporre i numeri complessi , che si vogliono sommare , in modo che le loro unità , o parti dello stesso valore , sieno in una colonna medesima , e far separatamente la somma di ciascuna di

(*) I numeri accompagnati da frazioni decimali non debbon ricevere questa denominazione; imperocchè si possono a prima vista convertire in una sola specie d'unità. 34^{mi}, 95, per esempio , riduconsi a 34945 centimetri.

queste colonne, rammentandosi quante unità, o parti di ciascun ordine son necessarie per compor quelle dell'ordine immediatamente più considerabile.

Ecco un esempio, su delle lire, soldi, e denari

984	12s.	8d.
38	6	9
1413	14	10
319	18	2
2756	12	5

Sommando primieramente i denari tra loro, perchè queste sono le parti di minor valore, ed abbracciando nel medesimo tempo le unità, e le decine di questi numeri, si trovano 29 denari; ma siccome 12 denari fanno un soldo, questa somma riducesi a 2 soldi, e 5 denari; non si scrivono dunque che i 5 denari, e si ritengono i soldi per portarli alla loro colonna.

In questo si sommano separatamente le unità, e le decine. Le prime danno 22, unendoci i 2 soldi ritenuti sopra i denari; non si scrivono che le due unità, e si ritengono le due decine per la colonna seguente, la cui somma s'eleva con questo mezzo a 5 decine: ma siccome la lira, composta di 20 soldi, contiene 2 decine, s'ottiene il numero delle lire risultanti dai soldi dividendo quello delle decine di soldi per 2. S'ottiene 2 per quoziente, e 1 di resto, che si scrive sotto la colonna dove si opera: mentre che si ritengono le lire per la seguente a sinistra. A partir da quest'ultima, l'operazione s'effettua come quella dei numeri incomplessi, e si trova 2756^{lir.} 12^{s.} 5^{d.}

141. Non ridurrò in regola questo metodo, ch'è facile d'adattare a quelle suddivisioni dell'unità, che vorremo; e per dare occasion d'eseguirlo, porrò qui sotto un esempio in tese, piedi, pollici, linee, e punti, che il Lettore potrà verificare da se stesso, rammentandosi che 12 punti fanno 1 linea; 12 linee, 1 pollice; 12 pollici 1 piede; 6 piedi 1 tesa.

34	5	6	7	8
tese	piedi	pollici	linee	punti
10	3	2	5	6
127	4	10	11	9
Somma 179	1	8	0	11

Della sottrazione dei numeri complessi.

142. Questa sottrazione si effettua nella stessa maniera che pei numeri incompleti, cangiando solamente ciò che rapportasi alla subordinazione delle unità, allorchè siamo obbligati di prendere in prestito sulle parti di maggiore valore, ove il numero inferiore sorpassi il superiore.

Sia, per esempio,

	795	31.	od.
	684	17	4
Differenza . . .	110	5	8

In questa sottrazione bisogna primieramente prendere in prestito 1 sulla colonna dei soldi, ovvero 12 denari, per toglierne i denari del numero inferiore; e s'ottiene per resto 8 denari. Per la colonna dei soldi, ove non resta più che 2 nel numero superiore, bisogna fare su quella delle lire l'imprestito di 1 lira, ovvero 20 soldi, per ottenere 22 soldi, dai quali togliendone 17, ne resta 5; allor passeremo alla colonna delle lire, dove si conterà la cifra superiore per un'unità di meno, e termineremo l'operazione secondo il metodo concernente i numeri incompleti.

L'esempio seguente preso in misure di peso terminerà di schiarir questo metodo.

10libbre	omarchi	4oncie	5grossi	37grani
4	1	3	6	49
Differenza 14	1	0	6	60

Per fare la sottrazione nella colonna dei grani, bisogna prendere in prestito 1 nella colonna dei grossi, e rammentarsi che questa unità equivale a 72 grani; unirli a mente ai 37, che sono scritti nel numero superiore, il che fa 109 grani, dai quali togliendone 49 restan 60. Si continua la sottrazione nell'altre colonne contando 1 oncia per 8 grossi, 1 marco per 8 oncie, 1 libbra per 2 marchi.

Ferò osservare in quest'occasione quanto la sconnessione, che trovasi nelle suddivisioni delle diverse

unità, dee portare imbarazzo nelle operazioni sui numeri complessi, ed in particolare quanto fosse poco comoda la divisione del grosso in 72 grani, la qual conduceva sempre a dell' operazioni parziali assai complicate.

Darò ancora un esempio in tese, e suddivisioni della tesa, tanto per esercitare il Lettore su questa specie di misure, quanto per far vedere come dobbiam contenerci allorchè mancano nel numero maggiore alcune delle parti contenute nell' altre.

16 tese	opiedi	opollici	olinee	opunti	
4	3	6	8	5	
Differenza	11	2	5	3	7

Per fare la sottrazione nella colonna dei punti non si può prendere in prestito che su quella delle tese; e ciò si fa decomponendo

1 tesa in 5 piedi più 11 pollici più 11 linee più 12 punti. S'immaginano questi numeri di piedi, di pollici, di linee, e di punti, rispettivamente posti nelle loro colonne, per toglierne successivamente ciascuno dei numeri inferiori corrispondenti, il che somministra i resti scritti al disotto. Si passa in seguito alla colonna delle tese contando per 1 di meno la cifra delle unità.

Della riprova della somma, e della sottrazione dei numeri complessi.

143. La riprova della somma si fa pure coi medesimi principj che pei numeri incomplessi; fa di mestieri soltanto, passando alle suddivisioni delle unità, sostituire al rapporto decimale, il valore di ciascuna parte a riguardo di quella, che la seguita a destra. Sian, per esempio.

984 ^{12s.} ^{8d.} ^{12s.} ^{8d.}	12s.	8d.
38	6	9
1413	14	10
319	18	2
2756	12	5
1122	22	0

S' opera sulle lire secondo la regola del n.º 19.

poi si convertono le 2 lire in decime di soldi, il che dà 4 di queste decime, le quali unite a quella che trovasi scritta nella colonna, formano il numero 5, da cui si tolgono le 3 unità di questa colonna; si pone al disotto il resto 2, il quale si conta per delle decime in rapporto alle 2 unità della colonna seguente. Restano ancora 2 soldi, che bisogna convertire in denari; si sommano i 24 denari, che ne risultano, coi 5 che vi son scritti, e si ha un totale di 29, il quale bisogna trovare mediante la somma dei denari di tutti i numeri, poichè queste sono le parti di minor valore. Questo è ciò, che di fatto succede, e che dimostra che l'operazione è esatta.

Io non mi tratterò nell'esporre la riprova della sottrazione, poichè dessa s'esegue col mezzo d'una somma (20); e digià abbiamo veduto precedentemente come s'effettuano quelle dei numeri complessi.

Della moltiplicazione dei numeri complessi

144. La moltiplicazione dei numeri complessi non presenta nessuna difficoltà allorchè ben si possiede la teoria delle frazioni; poichè in primo luogo si possono cangiare il moltiplicando, e il moltiplicatore in numeri frazionarij mediante rapporti di ciascuna suddivisione dell'unità con quella che la precede, come lo abbiamo fatto nei n.º 131, e 136 pei valori del metro in rapporto alla tesa, e del chiliogrammo in rapporto alla libbra.

Se s'avessero, per esempio, 15 lire, 12 soldi, e 4 denari, si ridurrebbero in primo luogo le lire a soldi moltiplicandole per 20, ed avrebbesi 300 da unirsi ai 12, che si trovano scritti, il che cangerebbe il numero proposto in 312 soldi, e 4 denari; si moltiplicherebbero pure i soldi per 12 affine di convertirli in denari; otterrebbesi 3744; ed aggiungendovi i 4 denari scritti, ne resulterebbero 3748 denari. Ciò fatto, s'osserverebbe che la lira, contenendo 20 soldi, il soldo 12 denari, la lira, contiene 20 volte 12, ovvero 240 denari, e che perciò 1 denaro è

$\frac{1}{240}$ della lira, d'onde resulta che 3748 denari fanno $\frac{3748}{240}$ della lira.

Se bisognasse moltiplicar questo numero per 7 tese e 4 piedi, si cangerebbero parimente 7 tese e 4 piedi in 46 piedi, ovvero $\frac{46}{6}$ di testa; si farebbe, secondo la regola del n.º 76, il prodotto delle frazioni $\frac{3748}{240}$ e $\frac{46}{6}$, il che darebbe $\frac{172408}{1440}$; ed osservando che l'unità del prodotto debb'essere della medesima specie di quella del moltiplicando (102), valuterebbesi, come segue, questa frazione mediante la lira tornese, e sue suddivisioni.

$$\begin{array}{r|l}
 172408 & 1440 \\
 2840 & \hline
 14008 & \\
 1048 & 119 \text{ lire } 14 \text{ s. } 6 \text{ d. } \frac{2}{3} \\
 20 & \\
 \hline
 20960 & \\
 9560 & \\
 80 & \\
 12 & \\
 \hline
 9600. & \\
 960. &
 \end{array}$$

La parte intera del quoziente della divisione del numeratore per il denominatore darebbe immediatamente le lire tornesi; poi moltiplicherebbesi il resto 1048 per 20, onde convertirlo in soldi; dividerebbesi il prodotto 20960 per il divisore 1440, ed il quoziente 14 sarebbe il numero dei soldi, i quali debbono accompagnare le lire già trovate. Il secondo resto 800 si convertirebbe in denari, moltiplicandolo per 12; finalmente dividerebbesi il prodotto 9600 per il divisore 1440 ed avrebbesi 6 denari da unirsi alle due prime parti del quoziente, colla frazione $\frac{960}{1440}$, la quale riducesi a $\frac{2}{3}$.

Quest' ultima operazione, la quale può applicarsi a qualunque siasi specie di misura, riposa su ciò che qualunque numero frazionario può essere considerato come l' indicazione d' una divisione, la quale si rende sempre possibile convertendo il numeratore in parti di più in più piccole, come lo abbiamo fatto a riguardo dei decimali nel n.° 95.

145. I metodi, che si seguono per ordinario nella moltiplicazione dei numeri complessi, probabilmente immaginati da degli uomini, i quali non se ne occupavano che per giungere al risultato, sembrano, a prima vista, men semplici, e men generali di quelli del numero precedente, ma essi son forse più comodo nella pratica; i medesimi offrono altronde quel carattere d' ingegno, che trovasi in tutte le invenzioni suggerite dal bisogno, alle quali s' arriva come per istinto, senza concepir bene precisamente l' estensione, e l' ordine del soggetto, che sviluppano in seguito quelli, i quali si son dedicati unicamente alla meditazione.

Seguito l' andamento, che i primi Aritmetici hanno tenuto, principiando da alcuni esempj. Sia la moltiplicazione.

	di 25lir. 12s.	
	per 16	
	150	
	25	
prodotto per 10 soldi	8	
per 2 soldi	1	12
Prodotto totale	409	12.

Qui il moltiplicando solo è complesso; si tratta di ripeterlo 16 volte, il che s'effettua coi soliti metodi sulla parte intera; poi s'osserva che, se si aggiungesse 1 al moltiplicando 25, il prodotto sarebbe aumentato precisamente del moltiplicatore 16, e che lo sarebbe della metà solamente, se non si fosse aggiunta al moltiplicando che la metà di 1 lira. Dietro a ciò, sa si avessero 10 soldi in seguito delle lire del

moltiplicando, bisognerebbe scrivere nel prodotto 8 unità, metà del moltiplicatore; ma in luogo di 10 soldi ve ne son 12; restan dunque ancora 2 soldi, di cui bisogna tener conto: ora, questi due soldi, essendo la 5ª parte di 10, non debbono aumentare il prodotto che della 5ª parte di ciò che hanno dato i 10 soldi: prenderemo in conseguenza la 5ª parte delle 8 lire precedentemente trovate, per scriverle sotto il prodotto, il che darà 1 lira e 12 soldi. La somma di tutti questi prodotti parziali sarà il prodotto totale domandato, cioè, 409 lire e 12 soldi.

146. Decomponendo nella stessa maniera in parti, che siano contenute esattamente nell'unità del moltiplicando, ovvero l'une nelle altre, le suddivisioni, le quali accompagnano le unità del maggior valore, oppure le *unità principali* del moltiplicando, altro non dobbiam fare che prendere delle parti simili sul moltiplicatore; ovvero sui prodotti di già formati. Queste parti si dicono *aliquote*; ne conosceremo bastantemente l'uso mediante l'esempio, che darò adesso.

	34	19	3	$\frac{1}{3}$
	18			
	272			
	34			
per 10 soldi	9			
per 5 soldi	4	10		
per 4 soldi	3	12		
per 1 soldo			ol.	18s. od.
per 3 denari		4 6		
per un denaro			o	1 6
per $\frac{1}{3}$ di denaro			6	
Totale	629	7s. od.		

Dopo d'aver formati i prodotti delle unità principali del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, s'opera come segue a riguardo delle suddivisioni del moltiplicando,

Si decompongono 19 soldi in 10 soldi, più 5 soldi, più 4 soldi.

Pei 10 soldi, si prende la metà del moltiplicatore;

Pei 5 soldi, la metà del prodotto precedente;

Pei 4 soldi, il quinto del moltiplicatore.

Siccome dai soldi bisogna passare ai tre denari, i quali non sono che il quarto d' un soldo, ed in conseguenza la sedicesima parte di 4 soldi, potrebb'essere un poco difficile prendere a un tratto la 16ma parte del prodotto di 4 soldi. Per evitare quest' imbarazzo, se ne prende primieramente il quarto, il che forma il prodotto, che darebbe un soldo, e poi si prende di nuovo il quarto di questo ultimo prodotto: si ha in tal maniera il prodotto relativo a 3 denari; ma si ha l' attenzione di portar più avanti verso la destra le cifre del prodotto precedente; il quale non avendo servito che a formare quest' ultimo, non dee far parte del prodotto totale (*). S' ottiene parimenti il prodotto relativo a $\frac{1}{3}$ di danaro, formando in primo luogo

quello di 1 denaro per mezzo di quello di 3, e si porta avanti come sopra il prodotto di 1 denaro. Si riuniscono in seguito tutti gli altri prodotti parziali, e la loro somma è il dimandato prodotto.

Ecco ancora un esempio sulla tesa, e sue suddivisioni.

	6tese 3piedi 5pollici 2linee			
	5			
	30			
Per tre piedi	2	3		
per tre pollici		1	3	
per 1		0	5	
per 1		0	5	
per 2 linee		0	0	10
Totale	32	5	1	10

(*) Gli Aritmetici danno ai prodotti, ch' essi non cercano, se non che per trovarne degli altri, la denominazione di *falsi prodotti*, la quale è sicuramente pessima.

Abbiám scritto due volte il prodotto di un pollice, invece di formare tutto ad un tempo il prodotto di 2 pollici, prendendo la 6^a parte di quello di 1 piede, perchè si aveva bisogno del prodotto di 1 pollice onde ottenere comodamente quel di 2 linee.

147. Allorchè il moltiplicatore solo è complesso, si decompongono nello stesso modo che sopra in parti aliquote dell'unità principale le suddivisioni, che esso contiene, e s'effettuano sul moltiplicando le operazioni, che desse indicano. In questo caso è importante il distinguere dallo stato del Problema qual dei due numeri proposti debb'esser preso per moltiplicando; imperocchè, determinando la natura delle unità del prodotto cercato, si formano i rapporti delle suddivisioni, alle quali bisogna discendere, prendendo i prodotti relativi alle parti aliquote, sulle quali ci potremmo molto ingannare, poicchè le suddivisioni del moltiplicando, e del moltiplicatore seguono leggi diverse quando questi due numeri non sono della medesima specie. Sia per esempio.

79³ lire9 marche 3 once 5 grossi 7 grani $\frac{1}{2}$

	7137 lire	s.	a.	
Per 2 once . . .	198	5		
Per 1	99	2	6	
Per 4 grossi . . .	49	11	3	
Per 1	12	7	9	$\frac{3}{4}$
Per 12 grani . . .				2l. 12. 3l. 5
Per 6 grani	1	0	7	$\frac{13}{16}$
Per 1	0	3	5	$\frac{29}{96}$
Per $\frac{1}{2}$	0	1	8	$\frac{125}{192}$
Totale	7497	12	4	$\frac{99}{192}$

In quest' esempio si è preso.

per 2 once, $\frac{1}{4}$ del moltiplicando ;

per 1 $\frac{1}{2}$ del prodotto precedente ;

per 4 grossi, $\frac{1}{2}$ del prodotto di 1 oncia ;

per 1 $\frac{1}{4}$ del prodotto precedente.

Ma siccome il grosso contiene 72 grani, abbiamo primieramente preso il sesto del prodotto relativo ad un grosso, affine d' avere il prodotto relativo a 12 grani, ed abbiain preso in seguito.

per 6 grani, $\frac{1}{2}$ del prodotto di 12 ;

per 1 $\frac{1}{6}$ del prodotto precedente ;

per $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ di quest' ultimo prodotto.

Questi diversi prodotti sono accompagnati da frazioni, che bisogna sommare insieme; il che s'effettua facilmente col metodo del n.º 69 perchè il maggiore dei denominatori contenendo tutti gli altri, si possono convertire tutte le frazioni nella specie dell'ultima; trovasi per la loro somma $\frac{483}{192}$, ovvero $2\frac{99}{192}$ aggiungendo questi 2 denari a quelli, che sonosi già scritti, e continuando la somma dell'altre colonne, si consegue il prodotto totale.

148. Finalmente, allorchè il moltiplicando, ed il moltiplicatore sono ambedue complessi dopo d'aver fatti i prodotti delle unità principali del moltiplicando per quelle del moltiplicatore, si prendono in primo luogo, solamente sulle unità principali del moltiplicatore, le parti aliquote, nelle quali si decompongono le suddivisioni del moltiplicando; di poi si decompongono le suddivisioni del moltiplicatore in parti aliquote della sua unità principale, e si eseguiscano sopra tutto il moltiplicando le operazioni, ch'esse indicano.

Per comprendere l'esattezza di questo metodo, serve osservare che il prodotto cercato dee contenere tre parti, cioè, il prodotto delle unità principali del moltiplicando per quelle del moltiplicatore; quello delle suddivisioni del moltiplicando per le unità principali del moltiplicatore; e finalmente il prodotto di tutto il moltiplicando per le suddivisioni del moltiplicatore.

Difatto quest'operazione può ridursi alla moltiplicazione di due fattori composti {d' un intero unito ad una frazione; e se si avesse, per esempio, $8\frac{2}{3}$ da moltiplicare per $6\frac{5}{7}$, il prodotto si comporrebbe evidentemente di 8, e di $\frac{2}{3}$, ripetuti ciascuno 6 volte, più $\frac{5}{7}$ di volta.

149. L'esempio seguente schiarirà questi principj, e ne farà conoscere l'applicazione.

	84	lire	6s.	3d.	$\frac{1}{3}$				
	15	tese	4	piedi	6	pol.	8	lin.	
	42	lire		soldi	denari				
	84								
per 5 soldi . . .	3		15						
per 1	0		15						
per 3 denari . . .	0		3		9				
per 1						ol.	1s.	3d.	
per $\frac{1}{3}$	0		0		5				
per 3 piedi . . .	42		3		1	$\frac{2}{3}$			
per 1	14		1		0	$\frac{5}{18}$			
per 6 pollici . .	7		0		6	$\frac{5}{18}$			
per 1							1	3	5 $\frac{5}{108}$
per 6 linee . . .	0		11		8	$\frac{113}{216}$			
per 2	0		3		10	$\frac{545}{648}$			
	1328		14		5	$\frac{70}{81}$			

Abbiamo preso in primo luogo sulle 15 unità principali del moltiplicatore le parti aliquote, nelle quali si decompongono i 6 soldi 3 denari $\frac{1}{3}$ del moltiplicando; abbiamo preso in seguito sopra tutto il moltiplicando le parti aliquote, che formano i 4 piedi 6 pollici 8 linee del moltiplicatore; sommando le frazioni, abbiamo ottenuto 2 interi e $\frac{560}{648}$ frazione, la cui più semplice espressione è $\frac{70}{81}$; si son sommati que-

si mieri colla somma della colonna dei denari; e si è terminata la somma secondo la regola del n. 140.

150. Il più spesso si trascurano le frazioni, le quali rendono il calcolo assai complicato allorché se ne vuol tener conto; ma in tal maniera il risultato può trovarsi difettoso di qualche unità nella colonna delle suddivisioni di minor valore. Eviterebbesi quest'errore, ed insieme l'imbarazzo, che dà la somma delle frazioni ordinarie, convertendo in decimi il resto, che lasciano nella formazione di ciascun prodotto parziale le ultime suddivisioni del prodotto antecedente; e fin tantoché non avremo dicci di questi prodotti, saremo sicuri d'avere il risultato esatto fino all'ultime unità.

Ecco un esempio relativo all'auna.

Trattasi di trovar ciò, che debbasi pagare per aune
 $15 \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{16}$ d'una stoffa, il prezzo dell'auna essendo
 di 42l. 17s. 11d.

	42l.	17s.	11d.
	15	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$
	210		
	42		
per 10 soldi . . .	7	10	
5	3	15	
2	1	10	
per 6 denari . . .		7	6
3		3	9
2		2	
per $\frac{1}{2}$ auna . . .	21	8	11, 5
$\frac{1}{4}$	10	14	5, 7
$\frac{1}{16}$	2	13	7, 4

Prodotto totale . . 678. 5 9, 6

I 17 soldi del moltiplicando si decompongo in
 10 soldi, più 5, più 2: si prende per 10 soldi la

metà di 15 ; per 5 , la metà del prodotto precedente , per 2 , la 5^a parte del prodotto relativo a 10 soldi. Il $\frac{3}{4}$, che sono scritti nel moltiplicatore , si decompongono in $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$: si prende la metà di tutto il moltiplicando , poi per $\frac{1}{4}$ la metà del prodotto precedente , quindi finalmente per $\frac{1}{16}$ la quarta parte di quest' ultimo prodotto. Nel prodotto totale non si fa alcun conto della cifra dei decimali di denaro , perchè dessa non è sempre esatta , a motivo delle frazioni di decimo , che sonosi trascurate.

151. Tutto ciò , che abbiamo veduto sulla moltiplicazione dei numeri complessi , essendo ridotto a regola , può enunciarsi così : *Moltiplicare in primo luogo le unità principali del moltiplicando per quelle del moltiplicatore ; decomporre le suddivisioni del moltiplicando in parti aliquote della sua unità principale ovvero delle parti aliquote , che le precedono ; valutare queste frazioni sulle unità principali del moltiplicatore solamente ; decomporre in seguito le suddivisioni del moltiplicatore in parti aliquote della sua unità principale , ovvero delle parti aliquote , che le precedono , e valutare queste frazioni sopra tutto il moltiplicando. Allorchè la frazione da valutarsi sarà troppo piccola in riguardo di quella , alla quale rapportasi , se ne faciliterà il calcolo prendendone una parte aliquota intermedia , per formare un prodotto ausiliare , dal quale ne dedurremo la parte aliquota cercata , e di cui ne porteremo in seguito le cifre più avanti verso la destra , onde non comprenderle nella somma dei prodotti parziali , i quali debbon comporre il prodotto totale.*

Della divisione de' numeri complessi

152. È importantissimo , per eseguire la divisione dei numeri complessi , di far attenzione alla natura delle unità del quoziente ; perchè da ciò dipende la conversione dei resti nelle suddivisioni di queste uni-

tà : ma l'esame attento del Problema non lascia mai dubbio a questo riguardo , soprattutto allorchè , considerando il dividendo come un prodotto , si determina quali han dovuto essere il moltiplicando , ed il moltiplicatore , così come l'abbiam fatto nel n.º 105.

Incontreremo in tal maniera due casi diversi : nell'uno il dividendo , ed il divisore essendo di differente natura , il quoziente debb'essere della medesima specie del dividendo ; nell'altro il dividendo , ed il divisore essendo della specie medesima , il quoziente debb'essere d'una specie diversa. L'operazione concernente a quest'ultimo caso essendo più semplice che il primo , vado immediatamente a occuparmene.

153. Ecco un Problema il quale conduce a questo caso. Il prezzo d'una tesa di lavoro costando 36 lire , 15 soldi , e 6 denari , si domanda quanto di questo lavoro potremo fare con 1689 lire e 17 soldi? Qui il dividendo 1689 lire e 17 soldi è composto colle 36 lire , 15 soldi , e 6 denari nella stessa maniera come il numero , che misura il lavoro cercato , è composto colla tesa , e sue suddivisioni ; così il quoziente debb'essere espresso da quest'ultime misure.

Per ottenerlo , si considera che il suo valore non dee cangiare allorchè si convertono il dividendo , ed il divisore in parti dello stesso valore , poichè le frazioni del medesimo denominatore danno lo stesso quoziente che quello dei loro numeratori ; ma riducendo ad un tempo il dividendo , ed il divisore in denari , i quali sono le parti di minor valore , che i numeri stessi contengono , renderemo questi numeri incomplessi.

Il dividendo 1689 lire , e 17 soldi dà 405564 denari , ed il divisore 36 lire , 15 soldi , e 6 denari , ne somministra 8826 : allora riguardasi il dividendo come se fosse composto di tese , ed il divisore come un numero astratto : imperciocchè , se la tesa non costasse che un denaro , s' n' avrebbero 405564 : laonde costando 8826 denari , non si dee prendere se non che la 8826ma parte del primo numero : l'operazione dunque s'intavola nel modo seguente.

405564		8826	
52524		45tese	5piedi 8pollice 5linee 6270
8394			8826
6			
50364			
6234			
12			
12468			
6234			
74808			
4200			
12			
8400			
4200			
50400			
6270			

Dopo d' avere ottenute le unità principali del quoziente , si moltiplica per 6 il resto 8394 tese , onde convertirlo in piedi , il che dà 50364 ; si continua la divisione , e si mette il quoziente nel posto dei piedi ; si moltiplica per 12 il resto 6234 di quest' ultima operazione affine di convertirlo in pollici ; si divide il prodotto 74808 pel divisore , e s' ottiene il numero dei pollici da scriversi nel quoziente : si moltiplica ancora il resto 4200 per 12, onde convertirlo in linee : la divisione del prodotto 50400 per il divisore somministra il numero delle linee da scriversi nel quoziente : e fermandosi quì , si termina questo quoziente colla frazione $\frac{6270}{8826}$, la quale riducesi alla sua espressione più semplice. Il risultato finale dell' operazione

è 45 tese , 5 piedi , 8 pollici , 5 linee $\frac{1045}{1471}$

La forma di questo metodo resterebbe la stessa quando i numeri proposti , ed il loro quoziente si rapportassero ad unità di qualunque altra specie.

154. Allorchè il quoziente debb'essere della medesima specie del dividendo, che il divisore è incompleto, l'operazione s'effettua come quella del n. 144.

Per esempio, 27 oncie d'un certo metallo sono costate 169 lire, 11 soldi, e 4 denari; si domanda a quanto ascenda il costo d'un oncia? Ecco l'operazione:

$$\begin{array}{r}
 169\text{l.} \quad 11\text{s.} \quad 4\text{d.} \quad | \quad 27 \\
 \hline
 7 \qquad \qquad \qquad 6\text{l.} \quad 5\text{s.} \quad 7\text{d.} \quad 7 \\
 20 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 27 \\
 \hline
 140 \\
 11 \\
 \hline
 151 \\
 16 \\
 12 \\
 \hline
 32 \\
 16 \\
 \hline
 192 \\
 4 \\
 \hline
 196
 \end{array}$$

7
Allorchè siamo arrivati alle 6 lire, le quali debbono entrar nel quoziente, si converte il resto 7 in soldi, e vi s'uniscono gli 11, che sono scritti nel dividendo, poi si divide il risultato 151 pel divisore 27: si hanno 5 soldi nel quoziente; si moltiplica il resto 16 per 12, onde convertirlo in denari; vi s'uniscono i 4 del dividendo; si divide il totale 196 pel divisore 27: si hanno per quoziente 7 denari e più la frazione $\frac{7}{27}$: il risultato compiuto è dunque 6 lire:

5 soldi, 7 denari $\frac{7}{27}$.

155. Finalmente, quando il dividendo, ed il divisore sono amendue complessi, e di specie differenti, bisogna convertir l'ultimo in frazione, come s'è indi-

cato nel n.° 144 : ed allora la regola data per le frazioni nel n. 79 conduce a moltiplicare il dividendo per il denominatore del divisore , ed a dividerne il prodotto , il quale può essere un numero complesso, pel numeratore del divisore , ch' è necessariamente incompleto. Eccone un esempio :

36 tese , 5 piedi , 6 pollici , e 8 linee di lavoro essendo state pagate 1374 lire , 12 soldi , e 4 denari, dedurre il prezzo d' una tesa.

Il divisore , convertito nell' ultime suddivisioni della sua unità principale, produce 31904 linee ; e la tesa contenendo 864 linee , si ha $\frac{31904}{864}$ di tesa per la frazione , che lo rappresenta.

Moltiplicando in primo luogo il dividendo 1374 lire ; 12 soldi , e 4 denari per 64 , secondo il metodo nel n. 146 , si trovano 1187668 lire e 16 soldi e d' altro non si deve far che dividere , come nel n.° precedente il complesso 1187668 lire e 16 soldi per il numero incompleto 31904 , il che dà per quoziente 37 lire , 4 sol , 6 denari $\frac{318}{997}$.

1.° 6. È a proposito d' osservare che il denominatore della frazione , che si ottiene in primo luogo per rappresentare il divisore , è il numero delle parti del minor valore contenute nell' unità principale, di maniera che si può enunciare così la regola precedente .

Affin di dividere un numero complesso per un altro numero complesso, si di mestieri convertire il dividendo per il numero delle parti di questo valore , contenute nell' unità principale del divisore , e dividere il secondo risultato per il primo.

Questa regola s' applicherebbe al caso sviluppato nel n. 153 se il dividendo non contenesse alcuna parte di minor valore dell' ultima del divisore : poichè, moltiplicare allora il dividendo per il numero delle parti di questo valore contenute nella sua unità principale , vuol dir convertirlo in queste parti.

157. Non si debbono trascurare i compendj , che può offrire la conversione del divisore in frazione , e

la riduzione di quest'ultima alla sua espressione più semplice: ne risultano spesso maggiore facilità, e chiarezza nei calcoli.

La pratica reiterata di queste operazioni suggerisce pure certi metodi particolari, che semplificano il calcolo, e ch'io non giudico qui a proposito d'indicare; mi limiterò a dimostrare come si convertano immediatamente i soldi in lire.

Siccome si tratta per questo di dividere per 20 il numero proposto dei soldi, dividesi questo in primo luogo per 10, separando una cifra sulla sua destra, poi si prende la metà di quelle, che sono alla sinistra, il che divide per 2, e dà in conseguenza lire. Allorchè resta un'unità, dessa rappresenta una decina di soldi, e bisogna unirle alla cifra separata sulla destra, la quale esprime dei soldi.

In tal maniera 3579 soldi producono 357, 9, indi 178 lire 19^s.

158. Il paragone dei metodi, che ho presentati successivamente, è al certo la miglior prova, che si possa dar del vantaggio, che procureranno le nuove Misure allorchè queste saranno adottate; e per quanta assuefazione che s'abbia al calcolo dei numeri complessi non potremo fare a meno di non sentir tutto il comodo del calcolo decimale, salvo che non si continuasse a servirsi delle antiche Misure, il che esige, per ciascun risultato; la conversione di queste Misure nelle nuove; operazione sempre lunga, assolutamente straniera rapporto al Sistema metrico, e che a malgrado di ciò alcuni si ostinano a riguardarla come inseparabile dall'uso di questo Sistema.

D'alcuni mezzi impiegati per abbreviare i calcoli Aritmetici

159. Allorchè si debbono moltiplicare l'uno per l'altro due numeri considerevolissimi, è comodo formare immediatamente i prodotti del moltiplicando per ciascuna delle cifre del moltiplicatore, le quali non sian ripetute. Sian, per esempio, i numeri 2937487541, e 65431476. Osservo che il moltiplicatore non contie-

ne che le cifre 1, 3, 4, 5, 6, 7; col moltiplicare successivamente per ciascuna di queste cifre il moltiplicando forma la seguente Tavola

1	2937487541
2	5874975082
3	8812462623
4	11749950164
5	14687437705
6	17624925246
7	20562412787

nella quale prendo i prodotti del moltiplicando per le cifre 6, 5, 4, 1, 3, 4, 7, e 6 del moltiplicando, onde collocarli nei posti, ch'essi debbon occupare, così come lo vediamo qui sotto; ed altro non mi resta da fare se non che una semplice addizione.

17624925246
14687437705
11749950164
2937487541
8812462623
11749950164
20562412787
17624925246

198079061871489696

Seguendo questo metodo, non si possono avere al più che 9 prodotti da formare, ed il resto dell'operazione riducesi ad una semplice somma.

160. Si riconduce la divisione a semplici sottrazioni, facendo primieramente i prodotti del divisore pei 9 primi numeri: Difatto, se si avesse 4539947812346 da dividersi per 73809, e si formasse una Tavola contenente i multipli del divisore, cioè,

1	73809
2	147518
3	221427
4	295236
5	369045
6	442854
7	516663
8	590472
9	664281

potrebbe operare nel modo seguente :

$$\begin{array}{r}
 4539947812346 \quad | \quad 73809 \quad 40802 \\
 442854 \dots \quad | \quad 61509406 \quad 73809 \\
 \hline
 111407 \dots \\
 73809 \dots \\
 \hline
 375988 \dots \\
 369045 \dots \\
 \hline
 694312 \dots \\
 664281 \dots \\
 \hline
 300313 \dots \\
 295236 \dots \\
 \hline
 507746 \\
 442854 \\
 \hline
 64892
 \end{array}$$

Cerchisi nella Tavola il multiplo, che più si approssima al numero espresso dalle sei prime cifre del dividendo; questo multiplo corrispondendo a 6, somministra 6 per la prima cifra del quoziente. Togliendo questo multiplo dal dividendo parziale, abbassando una cifra dippiù, e cercando qual sia il multiplo, che più s'approssima al nuovo dividendo parziale, trovasi 1 per la seconda cifra del quoziente. Si prosegue in tal maniera l'operazione sino alla fine per mezzo di sottrazioni.

161. Quando s'impiegano i decimali per arrivare ad un certo grado d'approssimazione, si può compendiare assai la moltiplicazione operando nel modo, che adesso vedremo. Suppongo che trattisi di conoscere, esatto fino ai millesimi d'unità: il prodotto dei numeri 45,6259573, e 28,63549.

Osserveremo ch'è inutile fare entrar nel prodotto tutte le cifre, che nei prodotti parziali rappresentano dei decimali d'un ordine più elevato dei 1000000mi; perchè la somma delle colonne, le quali contengono i decimali ulteriori ed i risultati di ciò che si ritiene, non possono influire sopra i millesimi; ed allora, per avere un prodotto composto di cento-mille-

sini, partendo dalla cifra situata sulla sinistra del moltiplicatore, la qual esprime qui delle diecine, serve cominciar la moltiplicazione dalla cifra 7 dei milionesimi del moltiplicando. Le cifre, che seguono quella delle diecine verso la destra, esprimendo delle unità di dieci in dieci volte minori, non cominceremo a loro riguardo la moltiplicazione se non che sulle cifre 5, 9, 5. ec., le quali seguono la cifra 7 verso la sinistra; perchè i 5 centomillesimi del moltiplicando moltiplicati per le 8 unità del moltiplicatore daranno dei cento-millesimi, nello stesso modo che i dieci-millesimi del moltiplicando moltiplicati pei decimi del moltiplicatore, e nello stesso modo che i millesimi del moltiplicando moltiplicati per centesimi del moltiplicatore, e così di seguito.

Per non ingannarsi nell'incominciamento di ciascuna moltiplicazione parziale, si scrivono sotto del moltiplicando le cifre del moltiplicatore in un ordine inverso; ponendo quella delle diecine del secondo sotto i milionesimi del primo, come si vede qui appresso

$$\begin{array}{r}
 456259573 \\
 9453682 \\
 \hline
 91251914 \\
 36500760 \\
 2737554 \\
 \cdot 136875 \\
 \cdot \cdot \cdot 22810 \\
 \cdot \cdot \cdot 1824 \\
 \cdot \cdot \cdot 403 \\
 \hline
 130652132
 \end{array}$$

In questa maniera ciascuna cifra del moltiplicatore si trova posta sotto la cifra del moltiplicando, per la quale si dee cominciar la moltiplicazione; di maniera che si trascurano quelle, che sono alla destra, e si scrivono tutti i prodotti nelle colonne medesime, poichè desso cominciano tutte da unità del medesimo ordine. Sommandoli, e separando cinque decimali, perchè l'ultima cifra debb' essere dei cento-millesimi, si trova 1306,52132; scancellando le due ultime cifre,

ha 1306,521 : risultato, che accordasi sino ai millesimi con quel, che sarebbesi ottenuto mediante la moltiplicazione effettuata col metodo ordinario, e che sarebbe 1306,521644004.

Se succedesse che un dei fattori non avesse tante cifre, onde potere stabilire la corrispondenza suddivisata, vi si supplirebbe ponendo dei zeri alla destra di questo fattore. A fine di conseguire con due decimali, per esempio, il prodotto dei numeri 54,236 e 532,27, bisogna scriverli come segue

$$\begin{array}{r}
 54236000 \\
 72235 \\
 \hline
 271180000 \\
 16270800 \\
 1084720 \\
 108472 \\
 37961 \\
 \hline
 288681953.
 \end{array}$$

Trovasi per il prodotto dimandato 28868, 20, aumentando l'ultima cifra d'un'unità, perchè le due, che sopprimonfi, sorpassano la metà di quest'unità, e vale a dire 50.

È una regola generale, allorchè si trascurano alcuni decimali, d'aumentar sempre d'un'unità, l'ultimo, che si conserva, quando quelli, che si sopprimono, superan la metà dell'unità di quelle dell'ultimo posto, che si lascia sussistere. Affin di conoscerne la ragione, serve osservare che 34,546, per esempio, s'avvicina di più a 34, 55 che a 34, 54.

Il metodo della divisione è capace d'un compendio analogo; ma siccome esige un maggior numero di precauzioni particolari per essere impiegato con sicurezza, io non mi fermerò a farne parola.

162. Abbiamo veduto nei n.60,69 il partito, che si può ricavare dalla decomposizione dei numeri in fattori per semplificare i calcoli relativi alle frazioni. E' dunque importante di saper eseguire questa decomposizione: l'esempio seguente dimostrerà come alla medesima si pervenga.

Sia il numero 360: lo lo divido primieramente per 2, ed ho per quoziente 180; divido questo quoziente per 2, ed ottengo 90, il quale dividesi parimente per 2, e dà 45: in tal maniera vedo digià che 360 è eguale a 2 per 2 per 2 per 45. Il numero 45 non essendo più divisibile per 2, lo divido per 3, ed ottengo 15, il quale divido ancora per 3, e dà 5, numero primo, il quale non può esser diviso se non che per se stesso, ovvero per 1 unità: 45 è dunque eguale a 3 per 3 per 5, ed in conseguenza 360 è eguale a

2 per 2 per 2 per 3 per 3 per 5.

Questi sei fattori essendo dei numeri primi, sono i *fattori semplici* del numero 360. E' manifesto che qualunque numero, il qual non è primo, può sempre così decomporli in un certo numero di fattori semplici, o primi.

A fin di riunire tutti i divisi del numero proposto, scrivesi il quoziente, che corrisponde a ciascun fattore, e questo fattore, in due colonne, come la seguente Tavola lo fa chiaro

36o	1	1
18o	2	2
9o	2	4
45	2	8
15	3	3 6 12 24
5	3	9 18 36 72
1	5	5 10 15 20 30 40 45 60 90 120 180 36o.

Adesso si fa manifesto alla terza linea che il numero proposto è stato diviso due volte di seguito per 2; desso è dunque divisibile per il prodotto di 2 per 2, ovvero per 4, il quale scriveremo allato al 2 nella terza linea. Il quoziente 90 essendo stato nuovamente diviso per 2, il numero proposto sarà in conseguenza divisibile per 2 volte 4, oppure per 8; scriverem dunque 8 allato del 2 sulla quarta linea. Il quoziente 45 scritto in principio di questa linea essendo ancora stato diviso per 3, il numero proposto sarà

evidentemente divisibile pei prodotti di 3 moltiplicato per ciascuno dei divisori precedenti: formeremo dunque sulla quinta linea i nuovi divisori composti 6, 12, 24. Continuando così a moltiplicare il fattore semplice di ciascuna linea per tutti i divisori, che lo precedono, ed osservando di non scrivere due volte lo stesso, avremo tutti i divisori del numero proposto.

163. Allorchè siamo condotti dal calcolo ad una frazione, di cui il numeratore, e il denominatore sono un po' grandi, e non hanno frattanto alcun fattore comune, si cercano dei valori approssimativi di questa frazione, i quali siano espressi per mezzo di numeri più semplici, all'effetto di potersene formare un' idea.

Se si ha, per esempio, il numero frazionario $\frac{1103}{887}$, se n' estraggono in primo luogo gl' interi, e s' ottiene 1 e $\frac{216}{887}$.

Adesso per formarsi un' idea più semplice della frazione $\frac{216}{887}$ si cerca di paragonarla ad una parte dell' unità, affine di non aver da considerare che un solo termine; e per far ciò, si dividono i suoi due termini per 216; si trova 1 per quoziente del numeratore, e $4\frac{23}{216}$ per quello del denominatore: quest' ultimo quoziente, il quale trovasi in conseguenza contenuto tra 4, e 5 ci fa comprendere che la frazione $\frac{216}{887}$ è contenuta tra $\frac{1}{4}$, e $\frac{1}{5}$. Arrestandosi a questo punto, si fa manifesto che il secondo valore approssimativo dell' espressione $\frac{1103}{887}$ è $1\frac{1}{4}$, oppur $\frac{5}{4}$; ma questo valore è troppo grande, perchè il vero valore sarebbe guale a 1 più 1 diviso per $4\frac{23}{216}$,

il che scrivesi così: $1\frac{1}{4\frac{23}{216}}$.

All' oggetto di formarsi un'idea esatta dell'espressione $4\frac{23}{216}$, bisogna considerarla come indicante il quoziente dell'intero 1 diviso per l'intero 4 accompagnato dalla frazione $\frac{23}{216}$

Se si dividono i due termini di $\frac{23}{216}$ per 23, il quoziente sarà $\frac{1}{9\frac{9}{23}}$ trascurando i $\frac{9}{32}$ che accompagnano l'intero 9, conseguiremo $\frac{1}{9}$ solamente in luogo di $\frac{23}{216}$, ed in conseguenza $4\frac{1}{9}$ sarà un terzo valore approssimativo di $\frac{1103}{887}$; valore, che sarà troppo piccolo, perchè 9 essendo minore del vero quoziente di 216 per 23, la frazione $\frac{1}{9}$ sarà maggiore di quella che dee accompagnar 4, ed in conseguenza il divisore $4\frac{1}{9}$ sarà maggiore pel divisore esatto $4\frac{23}{216}$, ed il quoziente $4\frac{1}{9}$ minore del vero.

Riducendo l'intero 4 colla frazione, che l'accompagna, e facendo la divisione secondo il metodo del n. 80, s'ottiene $\frac{9}{37}$ e si ha $1\frac{9}{37}$, ovvero $\frac{46}{37}$ per il terzo valore approssimativo di $\frac{1103}{887}$.

L'espressione esatta di questo valore essendo

$$4\frac{1}{9\frac{9}{23}}$$

se si dividono i due termini di $\frac{9}{23}$ per 9, avremo

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 4\ 1 \\ 9\ 1 \\ 2\ 5 \\ 9 \end{array}$$

trascurando la frazione $\frac{5}{9}$, resterà

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 4\ 1 \\ 9\ 1 \\ 2 \end{array}$$

valore troppo grande, poichè la frazione $\frac{1}{2}$ essendo maggiore di $\frac{1}{2} \frac{5}{9}$, di cui essa tiene il posto, formerà, unendola a 9, un denominator troppo grande; la frazione da unirsi a 4 sarà allor troppo piccola, e l'ultimo denominatore, essendo troppo piccolo, renderà l'ultima frazione troppo grande.

Riducendo in primo luogo $9 \frac{1}{2}$ in frazione, conseguiremo $\frac{19}{2}$; $\frac{1}{9} \frac{1}{2}$ equivarrà dunque a $\frac{2}{19}$, ed il valore

approssimativo diverrà: $\frac{1}{4} \frac{2}{19}$: ora $\frac{1}{4} \frac{2}{19}$ somministra $\frac{19}{78}$; ed unendovi l'unità s'ottiene $\frac{19}{78}$, ovvero $\frac{97}{78}$ per un quarto valore approssimativo di $\frac{1103}{887}$.

Riprendendo l'espressione

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 4\ 1 \\ 9\ 1 \\ 2\ 5 \\ 9 \end{array}$$

divido i due termini dell'ultima frazione $\frac{5}{9}$ per 5;

s'ottiene $1\frac{4}{5}$ e

$$1\frac{1}{4}$$

$$4\frac{1}{9}$$

$$2\frac{1}{4}$$

$$4\frac{4}{5}$$

trascurando la frazione $\frac{4}{5}$ resterà

$$1\frac{1}{4}$$

$$4\frac{1}{9}$$

$$2\frac{1}{4}$$

$$1$$

e vedremo, come qui sopra, che questo valore è minor del valore esatto.

La frazione $1\frac{1}{4}$ riducesi $\frac{1}{3}$ quindi la seguente $\frac{1}{9}$ dando $\frac{3}{28}$, quella che segue si cangia in $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{28}$ eguale a $\frac{28}{115}$; di maniera che il 5.° valore approssimativo è $1\frac{28}{115}$ ovvero $1\frac{43}{115}$.

Dividendo finalmente per 4 i due termini dello frazione $\frac{4}{5}$, che si è trascurata qui sopra, ha per quoziente $1\frac{1}{4}$; e sopprimendo in primo luogo la frazione $\frac{1}{4}$ ottengo il nuovo valore.

$$1\frac{1}{4}$$

$$4\frac{1}{9}$$

$$9\frac{1}{2}$$

$$2\frac{1}{4}$$

$$1\frac{1}{4}$$

maggiore del vero.

Se si riducono successivamente tutti i denominatori in frazione, a fine d'ottenere la frazione semplice, che dessa rappresenta, troveremo

$$1 \frac{47}{193} \text{ ovvero } \frac{240}{193}$$

Rimettendo la frazione $\frac{1}{4}$ allato dell'ultimo denominatore, formasi l'espressione

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4 \frac{1}{1} \\ 9 \frac{1}{1} \\ 2 \frac{1}{1} \\ 1 \frac{1}{1} \\ 1 \frac{1}{4} \end{array}$$

la quale, essendo ridotta come le precedenti, riproduce il numero frazionario $\frac{1103}{887}$

Opererebbesi nella stessa maniera su qualunque altra frazione, e se ne ricaverebbe una serie di valori approssimativi alternativamente maggiori, e minori dei suoi veri valori, se questa è una frazione propriamente detta, ovvero alternativamente minori, e maggiori, se come nell'esempio precedente, il numeratore sorpassi il denominatore.

Gli sviluppiamenti, che ho trovati per l'espressione $\frac{1103}{887}$, sono *frazioni continue*, quali si possono in generale così definire: *Frazioni, il cui denominatore è composto d'un intero più una frazione, la quale ha parimente per denominatore un intero più una frazione; e così successivamente.* Questa specie di frazioni gode di molte proprietà importanti, per le quali io rimando al *Complemento degli elementi d'Algebra*.

Sull'applicazione dell'Aritmetica alla Banca, e al Commercio.

164. A giudicare dal gran numero di regole, o

formule, che son contenute nei Trattati d'Aritmetica destinati pei Banchieri, e negozianti, si crederebbe che vi fosse per queste Professioni un' Aritmetica particolare, laddove che tutta la difficoltà dell'applicazione delle regole ordinarie non riposa che sull'intelligenza dei termini tecnici introdotti dall'uso, e il più spesso senza nessun bisogno. Quando questi termini son bene spiegati, qualunque Calcolatore che siasi, renderà sempre, in numeri, la vera risposta ai diversi Problemi, che gli si potranno proporre.

Lo *sconto*, ed il *cambio* sono le operazioni le più usuali della Banca: abbiamo veduto (120) come lo sconto dovrebbe effettuarsi dietro al fine, che ci proponghiamo; ma i primi, che l'hau praticato, hanno trovato più semplice di prelevare il frutto della somma intera, come se fosse questa somma medesima, ch'essi pagassero anticipatamente. (Vedeasi la nota della pag. 13.).

In generale, nelle contrattazioni, qualunque somma, della quale non si può disporre se non che in un tempo futuro, ha un valore reale minor del suo valor nominale a causa del frutto, ch'esso riporta, a contar dal momento, in cui questa si possiede ed in conseguenza il godimento d'una somma anticipata aumenta il suo valore reale. Da ciò ne nasce che, per paragonar delle somme pagabili in diverse epoche, bisogna tener conto del frutto, che desse debbono produrre a quello, che ne dispone. Le regole del n.º 120 son sufficienti per quest'oggetto, ogni qual volta che l'intervallo di un tempo non ecceda un anno, e che non si accumulino i frutti col capitale; nel caso contrario, bisogna impiegare le formule concernenti l'*interesse composto*, riportate alla fine dei miei *Elementi d'Algebra*.

Il cambio, che serve ad evitare il trasporto del numerario compensando, gli uni cogli altri i debiti, che si contraggono reciprocamente dai Negozianti di diversi paesi, conduce ad un calcolo, il cui fine è sempre di trovar ciò, che una somma pagabile in una piazza di commercio vale in un'altra, tanto per rapporto alle due somme riguardate come equivalenti

nelle monete di que- le piazze ; tan' o per una scri- f- da rapporti formati da somme equivalenti prese in mo- nete di diverse piazze comunicanti l' une ' coll' altre. Il. n. 138 offre un esempio generale , da cui le for- mule particolari non differiscono che per la soppres- sione dei diversi fattori , i quali , in ciascun caso , possono esser comuni al numeratore , e al deuomina- tore de' rapporti , paragonati. Le somme equivalenti , che formano questi rapporti , sono annunziate ciascun giorno nei Fogli pubblici , perchè desse variano se- condo le ciacostanze : ma questi caugiamenti non in- fluiscono punto sullo spirito del metodo indicato sotto il nome di *regola congiunta*

A riguardo delle operazioni di commercio, si tro- va nel n. 124 tutto ciò , ch' è necessario per divi- dere i guadagni , ovvero le perdite risultanti da un' associazione qualunque ; i *diritti di commissione* , le *provvizioni* , le *buonificazioni* , ec. si valutano a un tanto per $\frac{o}{o}$ nella stessa maniera che il frutto ; le

tasse le gabelle han dei rapporti coi valori delle mer- canzie , ovvero sono stabilite sull' unità tanto di peso , che di volume , e posson concludersi , per delle qua- ntità qualunque , col mezzo delle proporzioni , e della frazioni.

Finalmente l'*impostamento dei Libri di scrittura* non è che la maniera di disporre gli *stati del da- re* , ed *avere* , ossia dei valori somministrati , e dei valori ricevuti dal Negoziante , in un ordine tale , che si possauo a ciascun istante paragonare gli uni cogli altri , per conoscerne la differenza , e determi- nare così il *bilancio* tra ciò , ch' esso debbe avere , e ciò , ch' esso debbe dare.

PARAGONE DELLE ANTICHE MISURE FRANCESI COLLE NUOVE

Caratteri usati nel denotare le antiche Misura

Per le monete

l. lira tornese , s. soldo , d. denaro (137).

Per il tempo.

giorno , or. ore , ' minuto primo , " secondo.

Pei pesi

lb. libbra, M marco, O ovvero $\oslash$ oncia, G ovvero g grosso, D ovvero D denaro o scropolo, G granaio (136).

Osservazione. Il denaro, o scropolo equivale a $\frac{1}{3}$ del grosso , ovvero a 24 grani.

Misure di lunghezza

tesa , pi piedi , po pollice , l linea , pt punto (131).

Osservazione. Le distanze alcune volte si misurano in passi ordinarij , considerati ciascuno $2\text{pi} \frac{1}{2}$, ed in passi geometrici ovvero bracci di 5pi .

Dimensioni esatte della Terra

Il raggio dell' equatore è di 3271 208 tese.

Il semi-asse, ovvero la distanza dal centro al polo , è di 3261 443 tese.

La distanza dal polo all' equatore , misurata sul meridiano di Parigi , è di 5130740 tese.

Il grado terrestre, ch' è la 90 ma parte della detta distanza , equivale dunque a 57008 tese.

L' arco terrestre d' un minuto primo è in conseguenza di circa 950 tese.

Tabelle calcolate del Sig. Haros per la conversione delle Misure antiche in nuove, e reciprocamente.

Ciascuna colonna contiene, nella prima linea, il valore della Misura indicata nel Titolo della colonna, ed in seguito i prolati di questo valore per numeri scritti nella colonna segnata N.

Vi sono per tutto cinque decimali, ma nell'uso ordinario possiamo limitarci a tre.

Convertire 8 tese, 5 piedi e 7 pollici in metri

8t. equivalgono a 15m., 592

5piedi 1, 624

7poll. 0, 189

Somma . . . 17m., 405

Risposta 17 metri, e 40 centimetri.

Convertire 89 aune $\frac{3}{4}$ di Parigi in metri

80aun. equivalgono a 95m., 076

9 10, 696

3 0, 891

$\frac{3}{4}$ 0, 891

Somma 106m., 663

Risposta 106 metri, e 66 centimetri.

Convertire 218 arpenti (acqua e foreste) in ecatere

200arp. equivalgono a 102ecat., 144

10 5, 167

8 4, 036

Somma 111 ecat., 337

Risposta 111 ecatere e 34 aze in circa.

Convertire 3050 libbre in chiliogrammi

3000lib. equivalgono a 1468chil., 52

50 24, 48

Somma 1493chil., 00

Risposta 1493 chiliogrammi.

Le medesime Tavole possono dare il prezzo della nuova unità d'una materia per mezzo di quello della antica unità espresso in franchi. Per esempio, l'auna del drappo costando 37fr. , 50 , è manifesto che , se si conoscesse l'espressione del metro in auna , altro non dovrebbe farsi che moltiplicare quest'espressione per 37 , 5 , il che ridurrebbesi a convertire 37m. , 5 in aune , ed in parti decimali dell'auna ; ma bisognerebbe contare il risultato per dei franchi. Ecco il calcolo di quest'esempio.

Mediante la Tavola, che converte i metri in aune,

30	equivalgono a 25aun. , 243
7	 5 , 890
0	, 5 0 , 421

Somma 37m. , 5 31aun. , 554 ,
e prendendo questo risultato per dei franchi , si trova 31 fr. 55cent. per il prezzo del metro del drappo.

Allorchè si vogliono convertire le nuove Misure dell' antiche , non si ottengono , mediante le Tavole seguenti , se non che degl' interi , e delle frazioni decimali , e resta da convertire queste frazioni in suddivisioni proprie a ciascuna specie di Misura.

TAVOLA per ridurre un numero qualunque di misure *lineari* antiche in misure nuove, e reciprocamente

N	Leghe terrest. in Chilom.	Leghe mar. in Chl.	Tese in Metri	Piedi in metri	Pollici in Metri	Linee in metri	N	Aune in metri	N	L'azioni d'Auna in metri	N	L'azioni d'Auna in metri	N	L'azioni d'Auna in metri
1	4,1344	5,3300	1,94904	0,34434	0,027070	0,002300	1	1,18843	1/2	0,394	3/8	0,743	7/16	0,320
2	8,8889	11,1111	3,89807	0,67968	0,054140	0,004512	2	2,36689	1/3	0,396	7/8	1,040	9/16	0,606
3	13,3333	16,6667	5,84711	0,97452	0,081210	0,007668	3	3,56534	2/3	0,792	1/2	0,999	1/6	0,817
4	17,7778	22,2222	7,79615	1,29936	0,108280	0,010820	4	4,75378	4/5	0,792	5/12	0,495	1/3	0,966
5	22,2222	27,7778	9,74519	1,62420	0,135350	0,013530	5	5,94223	5/6	0,891	2/3	0,693	5/12	1,114
6	26,6667	33,3333	11,69422	1,94904	0,162419	0,016241	6	7,13068	6/7	0,198	1/2	1,089	1/2	
7	31,1111	38,8889	13,64326	2,27388	0,189489	0,018948	7	8,31912	7/8	0,990	5/6	0,974	5/6	
8	35,5556	44,4444	15,59230	2,59872	0,216559	0,021655	8	9,50757	8/9	0,149	1/6	0,223	5/6	
9	40,0000	50,0000	17,54133	2,92356	0,243629	0,024362	9	10,69601	9/10	0,446	5/6	0,371	5/6	
10	44,4444	55,5556	19,49037	3,24840	0,270690	0,027069	10	11,88446						

N	Chilom. in Leghe terrestri	Chilom. in Leghe marine	Metri in Tese	Metri in Piedi	Metri in Pollici	Metri in Linee	N	Aune in Parigi
1	0,225	0,18	0,51307	3,07844	36,9413	443,296	1	0,34144
2	0,450	0,36	1,02615	6,15689	73,8827	886,592	2	1,68287
3	0,675	0,54	1,53922	9,23533	110,8240	1329,888	3	2,52431
4	0,900	0,72	2,05230	12,31378	154,7633	1773,184	4	3,36574
5	1,125	0,90	2,56537	15,39222	184,7066	2216,480	5	4,20778
6	1,350	1,08	3,07844	18,47066	221,6480	2656,775	6	5,04861
7	1,575	1,26	3,59152	21,54911	258,5893	3103,071	7	5,89005
8	1,800	1,44	4,10459	24,62755	295,5306	3546,367	8	6,73148
9	2,025	1,62	4,61767	27,70600	332,4720	3989,663	9	7,57292
10	2,250	1,80	5,13074	30,78444	369,4133	4432,959	10	8,41435

* La Lega di 25 a grado equi-
vale a tese 2280, 33 in consequen-
za del valore definitivo del Metro.

** La Lega marina di 20 a gra-
do equivale a 2850 tese, 41.

*** L'Auna di Parigi equivale
a 3 piedi ; 7 pollici , 10 linee $\frac{5}{6}$.

* La Lega di 25 a grado equivale a tese 2280, 33 in conseguenza del valore *definitivo* del Metro.

** La Lega marina di 20 a grado equivale a 2850 tese, 41.

*** L'Auna di Parigi equivale a 3 piedi ; 7 pollici , 10 linee $\frac{5}{6}$.

TAVOLA per ridurre un numero qualunque di misure *agrarie* antiche in misure nuove e viceversa

N	Tesequadro in		Piedi quadri in		Pollici quad. in		Linee quad. in		N	Leghequadre in		Leghequadre in		Arpen- to d'Acque e Foreste in Ec- tare ovvero Per- tiche quadre in Are		Arpen- to di Parigi in Ecatare ovvero Pertiche quadre in Are	
	Metri quadri	Metri quadri	Metri quadri	Metri quadri	Metri quadri	Metri quadri	Metri quadri	Metri quadri		Miriometri quadri	Miriare in	Miriare in	Miriare in	Are	Are	Are	Pertiche quadre
1	3,98744	0,105521	0,00073278	0,00000509	0,00000509	0,00000509	0,00000509	0,00000509	1	0,1975309	19,75309	39,50617	0,510720	0,341887	0,083774	2,924913	5,849886
2	7,97487	0,211041	0,00146556	0,000010178	0,000010178	0,000010178	0,000010178	0,000010178	2	0,3950617	39,50617	79,01234	1,021440	0,683774	1,655611	5,849886	11,699772
3	11,96231	0,316562	0,00219834	0,000015267	0,000015267	0,000015267	0,000015267	0,000015267	3	0,5925926	59,25926	118,51852	1,532160	1,025661	2,483417	8,774829	17,549658
4	15,94975	0,422083	0,00295112	0,000020356	0,000020356	0,000020356	0,000020356	0,000020356	4	0,7901234	79,01234	158,02469	2,042880	1,367548	3,311225	11,699772	23,399544
5	19,93718	0,527604	0,00366390	0,000025445	0,000025445	0,000025445	0,000025445	0,000025445	5	0,9876543	98,76543	197,53086	2,553600	1,799435	4,181887	13,624715	27,149658
6	23,92462	0,633124	0,00439668	0,000030534	0,000030534	0,000030534	0,000030534	0,000030534	6	1,1851852	118,51852	237,03710	3,064320	2,051312	4,907239	15,624715	31,179683
7	27,91205	0,738645	0,00512946	0,000035623	0,000035623	0,000035623	0,000035623	0,000035623	7	1,3827160	138,27160	276,54320	3,575040	2,303209	5,712340	17,549658	35,179683
8	31,89949	0,844166	0,00586224	0,000040712	0,000040712	0,000040712	0,000040712	0,000040712	8	1,5802469	158,02469	316,04690	4,085760	2,506209	6,517968	19,549658	39,179683
9	35,88693	0,949686	0,00659502	0,000045801	0,000045801	0,000045801	0,000045801	0,000045801	9	1,7777777	177,77777	355,55554	4,596480	2,707239	7,423409	21,549658	43,179683
10	39,87436	1,055207	0,00732780	0,000050890	0,000050890	0,000050890	0,000050890	0,000050890	10	1,9753086	197,53086	395,06170	5,107200	2,907239	8,338870	23,549658	47,179683

N	Tesequadro in		Piedi quadri in		Pollici quad. in		Linee quad. in		N	Leghequadre in		Leghequadre in		Arpen- to d'Acque c Fo- reste ovvero Are in		Arpen- to di Parigi ovvero Are in Pertiche quadre	
	Metri quadri	Metri quadri	Metri quadri	Metri quadri	Metri quadri	Metri quadri	Metri quadri	Metri quadri		Miriometri quadri in	Miriare in	Miriare in	Miriare in	Are	Are	Are	Pertiche quadre
1	0,263245	9,47982	1361,00	1065,11	39,3023	589,534	786,045	982,557	1	5,0625	0,030025	0,101250	1,950020	3,916040	5,849886	2,924913	5,849886
2	0,526490	18,95963	2720,32	2130,23	78,6046	1179,068	1564,110	1965,114	2	10,1250	0,101250	0,151875	3,900040	7,832080	11,699772	5,849886	11,699772
3	0,789735	28,43945	4080,48	3195,34	117,9068	1753,600	2346,165	2941,671	3	15,1875	0,151875	0,202500	5,850060	11,748120	17,549658	8,774829	17,549658
4	1,052980	37,91916	5440,64	4260,45	156,5424	2345,360	3128,220	3951,557	4	20,2500	0,202500	0,253125	7,800080	15,624715	23,399544	11,699772	23,399544
5	1,316225	47,38897	6800,80	5380,63	196,2636	2918,080	3878,820	4946,945	5	25,3125	0,253125	0,303750	9,750100	19,549658	29,149658	15,624715	29,149658
6	1,579470	56,86869	8160,96	6456,80	234,7579	3477,120	4637,760	5996,880	6	30,3750	0,303750	0,354375	11,748120	23,399544	35,179683	19,549658	35,179683
7	1,842714	66,33771	9521,12	7537,95	273,1579	4076,400	5435,360	7115,557	7	35,4375	0,354375	0,405000	13,706140	27,149658	40,179683	23,399544	40,179683
8	2,105959	75,81453	10981,28	8686,02	312,2000	4672,000	6200,000	8125,000	8	40,5000	0,405000	0,455625	15,624715	31,179683	45,179683	26,324487	45,179683
9	2,369204	85,29134	12281,44	9786,02	351,2500	5296,000	7056,000	9281,250	9	45,5625	0,455625	0,506250	17,622180	35,179683	49,179683	29,149658	49,179683
10	2,632449	94,76816	13646,60	10886,11	390,3023	5895,340	7860,450	10125,000	10	50,6250	0,506250	0,556875	19,580200	39,179683	53,179683	29,149658	53,179683

N	Tese cube in Metri cubi	Piedi cubi in Metri cubi	Pollici cubi in Metri cubi	Linee cube in Metri cubi	N	Corde di Legna (Acqua e Forente) in Steri	Solue, un cubito ne ha Steri ovvero Metri cubi
1	74,0389	0,0034773	0,000019830	0,00000001140	1	3,8391	0,0000000000000000
2	14,80728	0,0685045	0,000039673	0,00000002296	2	7,6781	0,20566
3	22,21167	0,1028318	0,000059549	0,00000003444	3	11,5172	0,30850
4	29,61556	0,1371090	0,000079346	0,00000004592	4	15,3602	0,41133
5	37,01945	0,1713865	0,000099182	0,00000005740	5	19,1933	0,51416
6	44,42334	0,2056036	0,000119018	0,00000006888	6	23,0243	0,61699
7	51,82723	0,2398408	0,000138855	0,00000008036	7	26,8734	0,71982
8	59,23112	0,2742181	0,000158691	0,00000009184	8	30,7124	0,82265
9	66,63501	0,3084953	0,000178528	0,00000010332	9	34,5515	0,92549
10	74,03890	0,3427726	0,000198364	0,00000011480	10	38,3905	1,02831

N	Metri cubi in Tese cubi	Metri cubi in Piedi cubi	Metri cubi in Pollici cubi	Metri cubi in Linee cubi	N	Steri in Corde di Legna (Acqua e Forente)	Metri cubi in Solue (da costruzione)
1	0,135004	29,1739	50412,42	0,0000000000000000	1	0,20040	9,7440
2	0,270128	58,3477	100824,83	0,0000000000000000	2	0,20060	19,4492
3	0,405192	87,5216	151237,25	0,0000000000000000	3	0,28144	29,1739
4	0,540257	116,6954	201649,66	0,0000000000000000	4	1,04192	38,8985
5	0,675321	145,8693	252062,08	0,0000000000000000	5	1,30241	48,6231
6	0,810385	176,0431	302474,50	0,0000000000000000	6	1,56289	58,3477
7	0,945449	204,2170	352886,91	0,0000000000000000	7	1,82337	68,0723
8	1,080513	233,3908	403299,33	0,0000000000000000	8	2,08385	77,7970
9	1,215577	262,5647	453701,74	0,0000000000000000	9	2,34433	88,5216
10	1,350641	291,7385	504124,16	0,0000000000000000	10	2,60481	97,2462

Tavola per ridurre un numero qualunque di misure di *capacità* antiche in misure nuove, e reciprocamente.

N	Pinte di Parigi in Litri	Moggia di Vino di Parigi in Ecatoltri	Sestiere o staio di grano di Parigi in Ecatoltri	Boisseaux in Litri	Litrons in Litri
1	0,9313	4,0822	1,0010	13,000	0,0150
2	1,8626	5,3644	3,1220	26,017	1,6260
3	2,7940	8,0466	4,6830	39,025	2,4391
4	3,7253	10,7288	6,2440	52,033	3,2521
5	4,6566	13,4110	7,8050	65,042	4,0651
6	5,5879	16,0932	9,3660	78,050	4,8781
7	6,5192	18,7754	10,9270	91,058	5,6911
8	7,4506	21,4576	12,4880	104,066	6,5042
9	8,3819	24,1398	14,0490	117,075	7,3172
10	9,3132	26,8220	15,6100	130,083	8,1302
N	Litri in Pinte di Parigi	Ecatoltri in Moggia di Vino di Parigi	Litri in Sestieri o Staio di Grano di Parigi	Boisseaux in Litri	Litri in Litrons
1	1,0757	0,3728	0,6106	0,0787	1,2300
2	2,1514	0,7457	1,2212	0,1575	2,4600
3	3,2271	1,1185	1,9219	0,2362	3,6900
4	4,3028	1,4913	2,5625	0,3150	4,9199
5	5,3785	1,8642	3,2031	0,3937	6,1499
6	6,4542	2,2370	3,8437	0,4724	7,3799
7	7,5299	2,6098	4,4843	0,5512	8,6099
8	8,6056	2,9826	5,1250	0,6300	9,8399
9	9,6813	3,3555	5,7656	0,7087	11,0699
10	10,7570	3,7283	6,4062	0,7874	12,2998

Tavola per ridurre un numero qualunque di *Pesi antichi* in *Pesi nuovi*, e reciprocamente.

N	Libbre in Chiliog.	Oncie in Chiliog.	Grossi in Chiliog.	Grani in Chiliog.	Quintali in Miriagr.
1	0,18931	0,00039	0,000824	0,0000331	4,8931
2	0,37862	0,00078	0,001648	0,0000662	9,7901
3	0,56793	0,00117	0,002472	0,0001093	14,6852
4	0,75724	0,00156	0,003296	0,0001424	19,5802
5	0,94655	0,00195	0,004120	0,0001755	24,4753
6	1,13586	0,00234	0,004944	0,0002086	29,3704
7	1,32517	0,00273	0,005768	0,0002417	34,2654
8	1,51448	0,00312	0,006592	0,0002748	39,1605
9	1,70379	0,00351	0,007416	0,0003079	44,0555
10	1,89310	0,00390	0,008240	0,0003410	48,9506
N	Chiliog. in Libbre	Chiliog. in Oncie	Chiliog. in Grossi	Chiliog. in Grani	Miriagr. in Quintal.
1	2,01268	32,086	261,49	1827,15	0,20249
2	4,02537	64,172	522,98	37654,30	0,40498
3	6,03805	96,258	784,47	56481,45	0,60747
4	8,05074	128,344	1045,95	75308,60	0,80996
5	10,06343	160,430	1307,44	94135,75	1,01244
6	12,07612	192,516	1568,93	112962,90	1,21493
7	14,08881	224,602	1830,42	131790,05	1,41742
8	16,10150	256,688	2091,90	150617,20	1,61991
9	18,11419	288,774	2353,39	169444,35	1,82240
10	20,12688	320,860	2614,88	188271,50	2,02489

PARAGONE di alcune misure straniere colle nuove
Misure Francesi

MISURE LINEARI

PESI

	Millim.		Gram. 3
Piede antico Francese	324,7	Libbra peso di marco	489,2
Piede Inglese	304,7	libbra troy	372,6
Varo di Castiglia	836,6	Inglese } avere di peso	453,1
Piede del Reno	313,9	Di Castiglia	459,4
Di Vienna	316,0	Colonia	467,4
D'Amsterdam	283,0	Vienna	558,6
Di Svezia	297,1	Amsterdam	491,4
Di Russia	354,1	Svezia	424,6
Della China	320,0	Russia	409,5

VALORI delle Monete straniere, secondo
il Signor BONEVILLE (*)

Il titolo (la quantità d'argento o d'oro) è espresso in millesimi della moneta.

INGHILTERRA

	Titolo	Valore
Corona (Crown) di 5 Scellini	0,917	6f. 020
Scellino	0,920	1 20
Ghinea di Giorgio III	0,917	26 26

AUSTRIA, E BOEMIA

Doppia Sovrana d'oro	0,915	34 89
Specie di Reichsthaler Risdallero	0,830	5 10
Fiorino (Gulden) di 60 Kreuzer	0,833	2 56
10 Kreuzer	0,486	0 41
Ducato di Francesco II. (oro)	0,986	11 69
Carolina (oro) di Baviera	0,771	25 74
Max d'oro idem	0,768	16 95
Fiorino d'oro d'Annover	0,781	8 69

OLANDA

Fiorino	0,913	2 10
Ducato (oro)	0,979	11 61

(*) Questa Tavola non somministra se non che i valori medj trovati col mezzo dei Saggi fatti sulle Monete in circolo: rispetto poi ai valori legali, vedete l'Annuario del 1818 pu bblicato dal Burò delle Longitudini.

	Titolo	Valore
Ruyder (oro)	0,917	31 28
Ducatone (argento)	0,934	6 65
Daler (Dallero)	0,861	5 30

DANIMARCA ED HOLSTEIN

Specie di <i>Reichstahler</i> Risdallero	0,875	5 55
Cristiano d'oro del 1775	0,905	20 80

STATO ECCLESIASTICO

Scudo di Pio VI	0,913	5 29
Testone <i>id m</i>	0,913	1 58
Papetto <i>idem</i>	0,906	1 03
Paolo <i>idem</i>	0,913	0 53
Zecchino (oro) <i>idem</i>	0,996	11 67
Doppia del 1775 <i>idem</i>	0,909	17 23

S P A G N A

Piastra del 1772	0,896	5 29
Pezzette da 4 reali	0,813	1 04
Reale nuovo da due reali	0,809	0 52
Reale di Vellon	0,809	0 26
Pistola del 1772 (oro)	0,893	20 69
Escudillos del 1786 (oro)	0,885	5 33

G E N O V A

Zecchino	0,995	11 80
--------------------	-------	-------

REPUBBLICA ELVETICA

Scudo di Basilea di 30 batzen	0,833	4 23
Fiorino di Basilea di 15 batzen	0,833	2 11
Scudo di Zurigo di due fiorini	0,844	4 67
Fiorino di Zurigo 40 scellini	8,840	2 34
Ducato	0,978	11 59

N A P O L I

Scudo di 120 grani del 1784	0,840	5 04
Ducato di 100 grani del 1784	0,840	4 18
Pezza di 6 ducati di Ferdinando IV	0,845	25 59

	Titolo	Valore
PARMA		
Ducato del 1784	0,906	5 10
PORTOGALLO		
Crociato di 480 reis	8,896	2 86
Doblone	0,917	169 12
Dobla	0,915	89 97
Mille reis (oro).	0,9 13	8 16
PRUSSIA		
Reichstaler di 24 groschen (Risdallero)	0,740	3 39
Eederico d' oro	0,901	20 54
RAGUSI		
Vislina o ragusina	0,576	3 60
ROMA		
Scudo	0,906	5 27
Zecchino	0,996	11 63
Testone	0,903	1 56
RUSSIA		
Rublo di 100 Kopek del 1762	0,875	4 01
Imperiale di 10 rubli (carta-monetata)	0,969	28 64
SARDEGNA		
Scudo di due lire e mezzo	0,896	4 60
Lira		1 84
Carlino di 25 lire.	0,890	49 03
SAVOJA E PIEMONTE		
Scudo di 6 lire, del 1755	9,906	6 96
Lira		1 16
SASSONIA		
Specie Reichsthaler (Risdallero) di 32 groschen	0,906	11

	Titolo	Valore
Golden (Fiorino)	0,830	2 55
Augusta d'oro	0,898	20 48

SICILIA

Scudo di 12 tari	0,826	4 94
Onza (oro) 1751.	0,859	13 00

SVEZIA

Specie di Dallerö di 48 Scellini del 1777	0,875	5 62
Ducato del 1777	0,977	11 68

TOSCANA

Francesconi o Leopoldini di 10 paoli	0,913	5 48
Lira	0,953	0 82
Ruspone	0,997	35 63
Zecchino o Ruspo	0,999	11 84

TURCHIA

Piastra di 40 paras	0,500	2 009
Zeri mahoud del 1781	0,803	6 45
Fonduc del 1769	0,799	9 47

VENEZIA

Ducato di 8 lire	0,816	4 04
Scudo della croce di 12, 4 lire	0,947	0 51
Tallero di 10 lire	0,826	5 19
Zecchino	0,997	11 82
Ducato d'oro	0,996	7 47
Osella di 3 9 lire.	0,948	2 03

STATI UNITI D'AMERICA

Dollaro.	0,975	5 16
------------------	-------	------

FINE

SUPPLEMENTO

Al Trattato elementare d' Aritmetica , necessario per passare immediatamente da questo Trattato agli Elementi di Geometria.

PER compendiare il discorso , si esprimono con dei segni particolari le parole , le quali ripetonsi più di frequente ; e quando ci occupiamo d' un numero , ovvero d' una grandezza qualunque senza considerare il suo valore particolare , ma solamente per indicar le sue relazioni con altre grandezze , ovvero le operazioni , alle quali essa debb' essere sottomessa , si distingue questa con una lettera dell' Alfabeto , la quale diviene allora il nome compendiato di essa grandezza.

+ *significa più , ovvero sommato con*

L' espressione $A+B$ indica la somma , la quale resulta dalla grandezza rappresentata dalla lettera A sommata con quella rappresentata da B, ovvero *A più B.*

— *significa meno.*

$A-B$ indica ciò , che resta quando si toglie dalla grandezza rappresentata da A quella rappresentata da B, ovvero *A meno B.*

× *significa moltiplicato per . . .*

$A \times B$, indica il prodotto della grandezza rappresentata da A moltiplicata per quella rappresentata da B, ovvero *A moltiplicata per B.*

$\frac{A}{B}$ indica il quoziente della grandezza rappresentata da A divisa per quella rappresentata da B , ovvero *A divisa per B.*

$A = B$ significa che la grandezza rappresentata da A è eguale a quella rappresentata da B, ovvero A eguale a B.

$A > B$ significa che la grandezza rappresentata da A sorpassa quella rappresentata da B, ovvero A maggiore di B.

$A < B$ significa A minore di B.

$2A$, $3A$, ec. indicano il doppio, il triplo, ec. della grandezza rappresentata da A.

II. Allorchè si moltiplica un numero per se stesso, si forma la sua seconda potenza, ovvero il suo quadrato: 5×5 , ovvero 25 è la seconda potenza di 5, ossia il quadrato di 5.

La seconda potenza è dunque il prodotto di due fattori eguali; ciascun di questi fattori è la radice quadrata del prodotto: 5 è la radice quadrata di 25.

Se si moltiplichì la seconda potenza per la sua radice, si ha la terza potenza, ovvero il cubo: 5×25 , ovvero 125 è la terza potenza di 5.

La terza potenza è un prodotto formato dalla moltiplicazione di tre fattori eguali; ciascun di questi fattori è la radice cubica di questo prodotto: 125 è il prodotto di 5 moltiplicato due volte per se stesso, ovvero $5 \times 5 \times 5$; e 5 è la radice cubica di 125.

In generale A^2 essendo il compendio di $A \times A$ indica la seconda potenza, ovvero il quadrato di A.

$\sqrt{A}$ indica la radice quadrata di A; ovvero il numero, il quale moltiplicato per se stesso produrrebbe il numero rappresentato da A.

A^3 essendo il compendio di $A \times A \times A$, indica la terza potenza, ovvero il cubo di A.

$\sqrt[3]{A}$ indica la radice cubica di A, ovvero il numero, il quale moltiplicato due volte per se stesso produrrebbe il numero A.

Tutti i numeri non son de' quadrati, o de' cubi perfetti, vale a dire, non hanno radici quadrate, o cubiche, che si possano esprimere esattamente: 19, per esempio, trovandosi tra 16, ch'è il quadrato di 4, e 25, ch'è il quadrato di 5, ha per radice un numero compreso tra 4, e 5, ma che non si potreb-

be assegnare esattamente, neppur col soccorso delle frazioni: questo è un numero *incommensurabile*.

Parimente 89 trovandosi tra 64, ch'è il cubo di 4, e 125, ch'è quello di 5, ha per radice cubica un numero compreso tra 4, e 5, ma che neppur questo potrebbe assegnare esattamente. Daremoj in appresso de' metodi per approssimarsi tanto d'avvicino quante vorremo alle radici quadrate, ed alle radici cubiche de' numeri, i quali non son de' quadrati, o de' cubi perfetti.

III. Allorchè due proporzioni hanno un rapporto comune, è manifesto che si posson mettere in proporzione gli altri due rapporti, perchè dessi sono eguali a quello, che loro è comune.

Se si ha

$$\begin{aligned} A : B &:: C : D, \\ E : F &:: C : D, \end{aligned}$$

ne risulterà necessariamente

$$A : B :: E : F.$$

Allorchè due proporzioni hanno i medesimi antecedenti, si posson mettere i conseguenti in proporzione; perchè se si ha.

$$\begin{aligned} A : B &:: C : D \\ A : E &:: C : E \end{aligned}$$

cangiando i medj di posto, queste proporzionj diverranno

$$\begin{aligned} A : C &:: B : D \\ A : C &:: E : F \end{aligned}$$

e ne conchiuderemo

$$B : D :: E : F$$

ciò, che riducesi a $B : E :: D : F$.

IV. Si posson fare ancora nelle proporzioni altri cangiamenti, i quali nello stesso modo che le trasposizioni de' termini, non turbino l'egualianza del prodotto degli estremi a quello de' medj.

1.º Se al conseguente d'un rapporto si aggiunga

il suo antecedente, e si paragoni questa somma coll' antecedente, quest' ultimo vi sarà contenuto una volta di più di quel che non lo era nel primo conseguente; il nuovo rapporto sarà dunque eguale al rapporto primitivo aumentato dell' unità. Se si faccia la medesima operazione sopra i due rapporti d' una proporzione, ne risulteranno evidentemente due nuovi rapporti eguali tra loro, ed in conseguenza una nuova proporzione.

Sia, per esempio, la proporzione

$$4 : 6 :: 12 : 18,$$

avremo

$$6+4 : 4 :: 18+12 : 12$$

ovvero

$$10 : 4 :: 30 : 12.$$

2.º Se dal conseguente d' un rapporto si tolga l' antecedente, e si paragoni questa differenza coll' antecedente, quest' ultimo vi sarà contenuto una volta di meno che nel primo conseguente: il nuovo rapporto sarà dunque eguale al rapporto primitivo diminuito dell' unità. Se si faccia la medesima operazione sui due rapporti d' una proporzione, ne risulteranno due nuovi rapporti eguali tra loro, ed in conseguenza una nuova proporzione.

Dalla proporzione

$$4 : 6 :: 12 : 18$$

ne dedurremo

$$6-4 : 4 :: 18-12 : 12$$

ovvero

$$2 : 4 :: 6 : 12$$

Per una proporzione tra grandezze qualunque denotate dalle lettere

$$A : B :: C : D$$

avremo, mediante i cangiamenti suddivisati.

$$B+A : A :: D+C : C,$$

$$B-A : A :: D-C : C.$$

Se si cangino i medj di posto in quest' ultime ,
otterremo

$$\begin{aligned} B+A : D+C :: A : C \\ B-A : D-C :: A : C ; \end{aligned}$$

ma in virtù del medesimo cangiamento la proporzione

$$A : B :: C : D$$

somministra pure

$$A : C :: B : D$$

e poichè i rapporti $A : C$, $B : D$: son eguali , ne
concluderemo.

$$\begin{aligned} B+A : D+C :: A : C , \text{ ovvero } :: B : D \\ B-A : D-C :: A : C , \text{ ovvero } :: B : D \end{aligned}$$

resultato, il quale si enuncia nel modo seguente.

*In una proporzione qualunque la somma , o la
differenza de' due primi termini sta alla somma , o
alla differenza de' due ultimi come il primo sta al
terzo , o come il secondo sta al quarto.*

Di più , i due rapporti $A : C$, ovvero $B : D$ es-
sendo comuni alle due ultime proporzioni quì sopra ,
ne resulta che gli altri rapporti delle proporzioni me-
desime sono eguali , e che in conseguenza

$$B+A : D+C :: B-A : D-C$$

ovvero cangiando i medj di posto ,

$$B+A : B-A :: D+C : D-C$$

vale a dire , che la somma de' due primi termini d'una
proporzione sta alla lor differenza come la som-
ma de' due ultimi sta alla lor differenza.

Per esempio ,

$$6+4 : 6-4 :: 18+12 : 18-12$$

ovvero

$$10 : 2 :: 30 : 6.$$

Allorchè la proporzione

$$A : B :: C : D$$

si cangia in

$$A : C :: B : D$$

A , e B sono gli antecedenti , C , e D i conseguenti , e le proporzioni.

$$B+A : D+C :: A : C , \text{ ovvero } :: B : D$$

$$B-A : D-C :: A : C , \text{ ovvero } :: B : D$$

corrispondono all' enunciato seguente

La somma , o la differenza degli antecedenti d'una proporzione sta alla somma , o alla differenza dei conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.

Se ne deduce la somma degli antecedenti sta alla lor differenza come la somma de' conseguenti sta alla lor differenza.

Se si abbia una serie di rapporti eguali

$$A : B :: C : D :: E : F$$

non considerando in primo luogo che i due primi , i quali forman la proporzione

$$A : B :: C : D ,$$

se ne deduce da ciò , che precede

$$A+C : B+D :: A : B ;$$

e poichè il terzo rapporto E : F è eguale al primo A : B , avremo

$$A+C : B+D :: E : F.$$

Se si prenda la somma degli antecedenti , e quella de' conseguenti in quest'ultima proporzione, ne risulterà

$$A+C+E : B+D+F :: E : F , \text{ ovvero } :: A : B.$$

Seguendo l' andamento medesimo, qualunque fosse il numero de' rapporti eguali , avrebbesi in ultimo luogo la somma d' un numero qualunque d' antecedenti sta alla somma de' lor conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.

V. Allorchè s' hanno due proporzioni qualunque

$$A : B :: C : D$$

$$E : F :: G : H$$

e si moltiplichino *per ordine*, vale a dire, a termine, i prodotti formano una proporzione, ovvero si ha

$$A \times E : B \times F :: C \times G : D \times H$$

Ciò è manifesto, poichè i nuovi rapporti $\frac{B \times F, D \times H}{A \times E, C \times G}$ saranno rispettivamente i prodotti de' rapporti primitivi

$$\frac{B}{A} \text{ e } \frac{F}{E}, \frac{D}{C} \text{ e } \frac{H}{G},$$

i quali sono eguali.

Se si moltiplichì la proporzione

$$A : B :: C : D$$

per

$$A : B :: C : D,$$

avremo (H)

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2;$$

dal che ne sègue che i quadrati di quattro quantità in proporzione formano una nuova proporzione.

Moltiplicando la proporzione

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2$$

per

$$A : B :: C : D,$$

avremo

$$A^3 : B^3 :: C^3 : D^3,$$

vale a dire, che i cubi di quattro quantità in proporzione formano una nuova proporzione.

VI. Si considerano spesso delle grandezze decomposte in più parti, e si ha bisogno di sommarle, di sottrarle, o di moltiplicarle in questo stato, vafe a dire di determinare come i risultati di queste operazioni siano formati colle parti delle grandezze proposte. Ecco alcune regole su questo soggetto.

1.º È manifesto che, se si voglia sommar la grandezza B—C la con grandezza A, fa di mestieri scrivere A+B—C; poichè non è nè B, nè C, che ci proponghiamo di sommare con A, ma solamente l'eccesso di B su G :

M

P

Q

N

d'altronde, se si prendan le rette MP , PN , e QN per rappresentare le grandezze A , B , e C , vedremo che

$$PQ = PN - QN, \\ MP + PQ = MP + PN - QN.$$

2.° Se dalla grandezza A si volesse togliere la grandezza $B - C$, bisognerebbe scrivere $A + C - B$, ovvero, ch'è la stessa cosa, $A - B + C$.

Infatti, la differenza di due grandezze non cambia allorchè si aggiunge a ciascuna la stessa grandezza: ora, se aggiugasi C a $B - C$, conseguiremo B ; facendo la medesima addizione alla grandezza A , si ottiene $A + C$, e la sottrazione di B dà allora $A + C - B$.

La figura di sopra conferma questo medesimo risultato; poichè, se si prendan le rette MN , PN , PQ per le grandezze A , B , C , si ha

$$QN = PN - PQ, \\ MN - QN = MN - PN + PQ;$$

e poichè $MP = MN - PN$, conseguiremo

$$MP + PQ = MN - PN + PQ;$$

risultato, il quale corrisponde ad $A - B + C$.

3.° Il prodotto della grandezza A per la grandezza $B + C$ è espresso da $A \times B + A \times C$; poichè detto prodotto dee contener tante volte il numero A quante unità vi sono nella somma de' numeri B , e C e dee in conseguenza esser composto di A preso tante volte quante unità vi sono in B , e più, di A preso tante volte quante unità vi sono in C ; il che si scrive $A \times B + A \times C$.

4.° Il prodotto di A per $B - C$ è espresso da $A \times B - A \times C$; poichè, se si rappresenti $B - C$ per D , avremo evidentemente $B = D + C$, ed in conseguenze $A \times B = A \times D + A \times C$: concluderemo da ciò che $A \times D = A \times B - A \times C$; il che forma la Proposizione enunciata qui sopra, perchè $D = B - C$.

VII. Sgue da ciò, che precede, che il quadrato d'un numero composto di due parti contiene il quadrato della prima, due volte il prodotto della prima per la seconda, ed il quadrato della secon-

da. Il numero 13, per esempio, essendo considerato come eguale a $9+4$, il suo quadrato 169 è composto
 del quadrato di 9, ovvero 81
 di 2 volte 9×4 , ovvero 72
 del quadrato di 4, ovvero 16
 TOTALE. , 169.

Per dimostrar l'enunciato in generale, serve osservare che il prodotto di A per $B+C$ essendo $A \times B + A \times C$, se si faccia $A=B+C$, i prodotti parziali $A \times B$, ed $A \times C$ diverranno $B \times B + B \times C$, e $B \times C + C \times C$; e riunendoli, otterremo il risultato

$$B \times B + B \times C + B \times C + C \times C,$$

il quale può scriversi come segue

$$B^2 + 2B \times C + C^2;$$

ciò, che dà il quadrato di $B+C$ conforme all'enunciato di sopra.

Si trova in una maniera simile, che il quadrato della differenza di due grandezze è composto del quadrato della prima, meno due volte il prodotto della prima per la seconda, più il quadrato della seconda. Il numero 9 essendo eguale a $13-4$, per esempio, il suo quadrato 81 sarà formato di $169-2$ volte $4 \times 13 + 16$; ch'è facile di verificare.

La dimostrazione generale della Proposizione suddivisa si forma facendo $A=B-C$ nel prodotto di A per la differenza $B-C$; poichè questo prodotto essendo espresso da $A \times B - A \times C$, se si scriva primieramente $B-C$ in luogo di A nei prodotti $A \times B$, ed $A \times C$, essi diventeranno rispettivamente

$$B \times B - B \times C, \text{ e } B \times C - C \times C;$$

e, per togliere il secondo dal primo, bisognerà, dietro all'articolo VI., scrivere

$$B \times B - B \times C - B \times C + C \times C;$$

ciò, che riducesi a

$$B^2 - 2B \times C + C^2,$$

e somministra il quadrato di B—C conformemente all'enunciato di sopra.

VIII. Il ravvicinamento dell'espressioni, o *formule*, dietro alle quali si calcolano le aree

del Parallelogrammo,

del Triangolo,

del Trapezio,

del Circolo,

finalmente del Settor circolare,

farà vedere a quelli, che si dedicheranno allo studio della Geometria, che la determinazione di tutte queste aree non dipende che da un prodotto di due fattori, i quali si posson sempre riguardare come la base, e l'altezza, vale a dire, come le *due dimensioni* d'un Rettangolo, equivalentemente all'area cercata. Quando questi fattori sono espressi in misure decimali, la loro moltiplicazione s'effettua secondo il solito; ma la denominazione dell'unità del risultato richiede alcune attenzioni.

Sia, per esempio, un rettangolo di 49mi, 54 di base sopra 15mi, 27 d'altezza; moltiplicando questi due numeri, si trova 756.4758. L'unità di questo numero è il quadrato, che ha un metro di lato, e che per questa ragione chiamasi *metro quadro*; le frazioni decimali ne son sempre la decima, la centesima, la millesima, ec. parte: la misura suddivisata potrebbe enunciarsi così 756 metri quadri, e 4758 decimillesimi di metro quadro; ma il più spesso si fan corrispondere le suddivisioni del metro quadro a quello del metro lineare; ed allora si dee osservare che

Il metro quadro contiene cento quadrati d'un decimetro di lato, ovvero cento *decimetri quadri*:

Il decimetro quadro contiene cento quadrati d'un centimetro di lato, ovvero cento *centimetri quadri*; e così di seguito.

Sono dunque i centesimi di metro quadro, i quali

esprimono i decimetri quadri; i decimillesimi, i quali esprimono i centimetri quadri; i milionesimi, i quali esprimono i millimetri quadri. Dietro a ciò, il numero 756, 4758 s' enuncia

756 metri quadri, 37 decimetri quadri, 58 centimetri quadri.

Si deduce da ciò che non è permesso confondere il decimo di metro quadro col decimetro quadro. La prima di queste suddivisioni non potrebbe rappresentarsi da un quadrato, le cui dimensioni sian de' numeri esatti; poichè l'unità non ne contiene che 10, e dieci non è un quadrato perfetto.

Si può riportare comodamente il decimo di metro quadro ad un rettangolo d' un metro di base sopra un decimetro d' altezza: è lo stesso a riguardo delle frazioni decimali, che seguono, e che denotano isolatamente de' rettangoli d' un metro di base sopra un centimetro, millimetro, ec. d' altezza.

Non è che separando le cifre di due in due, a partir dalla virgole, che si può enunciare il numero in misure quadre.

Quando le cifre decimali sono in numero impari, fa di mestieri scrivere uno zero alla destra affinchè l'ultimo ordine di decimali sia riportato a misure quadre.

Il rettangolo, che ha 27mi di base sopra 4mi, 3 d' altezza, per esempio, ha per misura in metri quadri 116, 1. Ponendo un zero alla destra di questo numero, desso diviene 116, 10, e si enuncia 116 metri quadri, e 10 decimetri quadri.

Ciò, che ho detto, si applica egualmente ai diversi ordini d' unità posti alla sinistra della virgola; ed osservando che l' *ara*, essendo un quadrato di 10 metri di lato, contiene 100 metri quadri, che l' *ecatara* contien cento are, il numero 37549 metri quadri, per esempio, si decompone in 3 ecatara, 75 are, e 49 metri quadri, o centiare.

E' a proposito di stabilire il senso di più espressioni; le quali qualche volta confondonsi. Che si dica un metro quadro, ovvero un metro in quadrato, ciò riducesi allo stesso, poichè non vi può esser que-

stione nei due casi che d' un quadrato il cui lato è un metro; ma bisogna accuratamente distinguere, per esempio, gli spazj di 10 *metri quadri*, e di 10 *metri in quadrato*; perchè l' uno indica un' area equivalente a 10 quadrati d' un metro di lato, e l' altro un sol quadrato avente 10 metri di lato, e che comprende in conseguenza 100 metri quadri.

L' uso delle misure decimali semplifica considerabilmente i calcoli della misura pratica dell' estensione. Con le antiche misure il primo mezzo, che si presente, è quello di convertire ciascun dei fattori nelle suddivisioni della più piccola specie; la quale sia contenuta in uno di essi, affinchè il risultato sia espresso in misure quadrate avanti questa suddivisione per lato. Se vi sian, per esempio, delle linee in un dei fattori, bisogna ridurli ambedue in linee; il prodotto sarà composto di linee quadre. Per risalire a delle misure maggiori, osserveremo, che

il pollice quadro equiv. a 12×12 , ovv. 144 linee quadre;

il piede quadro 12×12 , ovv. 144 pol. quadri;

la tese quadra 6×6 , ovv. 36 piedi qua.;

e dividendo successivamente per questi numeri, tradurremo il risultato in tese quadre, piedi, e pollici quadri.

Peraltro questo mezzo era poco in uso, perchè conduce ad operare su dei numeri troppo grandi, ma si adoprava quello, che serve ad effettuar la moltiplicazione de' numeri complessi. Che siano, per esempio, le due dimensioni da moltiplicarsi

49^{tese} 5^{pi} 7^{po}, e 32^t 4^{pi} 5^{po}:

se si scelga il primo per moltiplicando, concepiremo primieramente un rettangolo avente 49^{tese} 5^{pi} 7^{po} di base sopra una tesa d' altezza, e che starà in conseguenza a quello, del quale cercasi la misura, come 1: 32^t 4^{pi} 5^{po}. Sarà permesso in conseguenza di riguardare il moltiplicatore 32^t 4^{pi} 5^{po} come un numero astratto: ora, un rettangolo di 49^t 5^{pi} 7^{po} di base sopra una tesa d' altezza si decompone nei seguenti

1. Un rettangolo di 49^{tese} di base sopra una tesa d' altezza, e contenente 49^{tese} quadre;

2. 5 rettangoli avanti ciascuno un piede di base sopra una tesa d'altezza : questi rettangoli si chiamano *tese-piedi* ; egli è manifesto che ve ne vogliono 6 per formare la tesa quadra ;

3. 7 rettangoli d'un pollice di base sopra una tesa d'altezza ; questi rettangoli si chiamano *tese-pollici* ; ne bisognano evidentemente 12 per formare la tesa-piede.

Proseguendo in tal maniera arriverebbesi , se vi fosse luogo , alle *tese-linee* , e alle *tese-punti*, le quali avrebbero tra loro, e colla tesa quadra i medesimi rapporti delle suddivisioni lineari , che a loro servono di base. I compendj per indicare queste misure , cominciando dalla tesa quadra , sono

t. t. , t. pi. , t. po. , t. l. , t. pt.

Ciò premesso , l'impiego delle parti aliquote, conformemente alle regole esposte sul fine del *Trattato Elementare d'Arithmetica* , somministra l'operazione seguente.

	4qt.t 32t	5t.pi 4p	7t.po 5p		
	98				
	147				
Per 3t.pi	16				
1t.pi	5	2			
1t.pi	5	2			
Per 6t.po	2	4			
1t.po		2	8		
Per 3pi	24	5	9	6t.l	
1pi	8	1	11	2	
Per 4Po	2	4	7	8	8t.pt
1Po.		4	1	11	2
Prodotto totale . .	1634t.t	3t.pi	2t.po	2t.l	10t.pt.

Eccetto la prima parte di questò risultamento , la quale è in tese quadre, le altra son dei rettangoli ; ma la loro conversione in piedi quadri , pollici quadri , ec. è facile ; poichè la tesa-piede equiv. a 6pi X 1pi, ovvero a 6 piedi quadri

la tesa-pollice $\frac{1t.pi}{12}$, ovv. $\frac{1pi}{2}$ quad., ovv. 72 pol qu ad.,

la tesa-linea $\frac{1t.po}{12}$ ovv. 6 pollici quadri;

la tesa-punto $\frac{1t.l}{12}$, ovv. $\frac{1}{2}$ pol. quad., ovv. 72 lin. quad.

Moltiplicando dunque rispettivamente per $6, \frac{1}{2}, 6, \frac{1}{2}$, le tese-piedi, tese-pollici, tese-linee, e tese-punti del prodotto qui sopra ottenuto, si trovano 1634 tese quadre, 19 piedi quadri, e 23 pollici quadri.

La tesa-quadra, e le sue parti non servivano che alla misura delle piccole aree; i campi si valutavano in *pertiche*; ed in *arpenti*: quest'ultime misure han variato secondo i tempi, e secondo i luoghi. Si trovano nelle Tavole dell'Aritmetica due sorte d'arpenti paragonati con le nuove misure agrarie, cioè l'*arpento dell'Acque*; e *Foreste*, e l'*arpento di Parigi*. L'uno, e l'altro eran composti di 100 pertiche; la pertica, che avrebbe dovuto chiamarsi pertica quadra, era un quadrato, il quale rispetto agli arpenti dell'Acqua, e Foreste aveva 22 piedi di lato, e solamente 18 in quello di Parigi. Il rapporto delle pertiche, lo stesso che quello de' due arpenti, è quello de' quadrati de' numeri 22, e 18, vale a dire di 484 a 324, il quale presso a poco riducesi al rapporto di 3 a 2.

La pertica di Parigi avendo 18 piedi; ovvero 3 tese di lato, conteneva 9 tese quadrate; e l'arpento del medesimo luogo contenendo esattamente 900 tese quadre, era più comodo dell'altro; ma tutte queste misure sono gran lunga inferiori alle misure decimali, nelle quali esse facilmente trasformansi col mezzo delle Tavole precitate; e d'altronde, convertendo in metri, e parti decimali di metro le dimensioni della misura proposta, il loro prodotto, somministrerebbe il rapporto di questa misura col metro quadro.

Non si tien proposto negli Elementi di Geometria che delle Figure terminate da linee rette, o da Circonferenze di Circolo; ma le formule citate nel

principio di quest' Articolo servono pure nella maggior parte de' casi della Pratica alla riquadratura dell' aree circonscritte da linee curve, perchè dividendo queste linee curve in piccole porzioni sensibilmente rette, si riduce la Figura proposta ad un Poligono rettilineo.

- IX. L' espressioni de' volumi del Prisma ,
della Piramide. : ,
del Prisma triangolare troncato. , ,
del Cono ,
del Cilindro. ,
e della Sfera

essendo tutte composte come rilevasi dagli Elementi di Geometria , del prodotto d' un' area moltiplicata per un' altezza , dipendono necessariamente da un prodotto di tre fattori, poichè l' area ne contien due ; e questo prodotto riducesi , conforme si dimostra negli Elementi medesimi , all' espressione d' un parallelepipedo rettangolo equivalente al Corpo proposto. E in questo senso che dicesi che un volume qualunque è il prodotto di 3 *dimensioni*. La loro moltiplicazione si fa coi soliti metodi ordinarij quando i tre fattori sono espressi in misure decimali; ed il risultato è composto d' un numero intero , e di parti decimali del cubo avente per lato l' unità lineare.

Prendo , per esempio , un parallelepipedo rettangolo , le cui dimensioni sono 49mi , 54 , 15mi , 27 , e 8mi , 5 ; il prodotto 6430 , e 443 di questi numeri fa vedere che il parallelepipedo proposto contiene 6430 cubi d' un metro di lato , e 443 diecimillesimi di questo cubo.

I decimali, quì sopra enunciati non son riportati che all' unità principale , la quale è il cubo d' un metro di lato , e che si chiama ancora *metro cubo* ; se si vuol decomporlo in parti , le quali siano i cubi di parti decimali dell' unità lineare , bisogna osservare che

Il metro cubo contiene $10 \times 10 \times 10$, ovv. 1000decim. cubi;
Il decimetro cubo : $10 \times 10 \times 10$, ovv. 1000 centim. cubi ; e così di seguito ; e che in conseguenza i deci-

metri cubi, ed i centimetri cubi esprimono dei millesimi, e dei milionesimi di metro cubo; ed in generale i decimali presi di tre in tre sono quelli, che corrispondono a delle misure cubiche.

Il risultato. 6430, 0443 non contenendo un numero di cifre decimali, che sia multiplo di 3, bisogna supplirvi con degli zeri, e scriverlo così

6430, 044300.

In questa maniera si enuncia dicendo

6430 metri cubi, 44 decimetri cubi, e 300 centim. cubi.

E inutile entrare in maggiori particolarità sopra questo soggetto; poichè sarà molto più comodo di tenersi alla prima enunciazione, purchè si abbia cura di non confondere il decimo, il centesimo, ec. del metro cubo col decimetro, col centimetro, &c. cubi. I primi si rapportano a de' parallelepipedi rettangoli aventi tutti per base il metro quadro, e per altezza un decimetro, un centimetro, ec.

Quando colle antiche misure non si voleva operare che sopra numeri interi, si convertiva ciascun dei fattori del volume cercato nelle suddivisioni della più piccola specie, che si fosse trovata nei tre; il prodotto trovavasi espresso in cubi aventi queste suddivisioni per lato; in linee cubi, per esempio, se i fattori erano stati convertiti in linee. Arrivavasi in seguito a delle misure maggiori osservando, che

il pollice cubo equivale a $12 \times 12 \times 12$

ovvero 1728 linee cubi,

il piede cubo 1728 pollici cubi,

la tesa cuba $6 \times 6 \times 6$, ovvero 216 piedi cubi;

e dividendo tanto quanto era possibile per questi numeri.

Il più spesso lasciavansi i fattori sotto la forma di numeri complessi. Moltiplicando due de' fattori tra loro calcolavasi primieramente in tese, quadre, tese-piedi, tese-pollici, ec. l'area, che servir doveva di base al volume cercato (considerata come quello d'un parallelepipedo rettangolo); poi si riguardava quest'a-

rea come la base d'un parallelepipedo rettangolo avente una tesa d'altezza, e che stava in conseguenza al corpo cercato come l'unità stava al terzo fattore, che poteva allora essere riguardato come un numero astratto. È manifesto che

1.° Una tesa quadra di base sopra una tesa d'altezza forma un cubo d'una tesa di lato ovvero una *tesa-cuba*.

2.° Una tesa-piede, vale a dire un rettangolo d'una tesa di lunghezza sopra un piede di larghezza, essendo presa per base d'un parallelepipedo rettangolo d'una tesa d'altezza, questo parallelepipedo ha due costole contigue d'una tesa, e può essere considerato come avente una tesa quadra di base sopra un piede d'altezza: gli si dà per questa ragione il nome di *tesa-piede*, il che si scrive *t. t. pt.*: ne son necessarie 6 per formare la tesa cuba;

3.° Una tesa-pollice sopra una tesa d'altezza forma parimente un parallelepipedo d'una tesa quadra di base sopra un pollice di altezza, che si chiama *tesa-tesa-pollice*, e che s'indica per *t. t. po.*: ne son necessarie 12 per formare la tesa-tesa-piede;

4.° La medesima progressione somministra in seguito delle *tese tese-linee*, ovvero, *t. t. l.*, *tese-tese-punti*, ovvero *t. t. pt.*

Il volume del parallelepipedo d'una tesa di altezza si trova così espresso da un numero, il quale rapportasi a delle suddivisioni assai semplici, e non si tratta d'altro che di moltiplicare, col mezzo delle parti aliquote, questo numero per l'altezza del parallelepipedo proposto.

Ecco per esempio, il parallelepipedo rettangolo, le cui dimensioni sono

49t 5pi 7po, 32t 4pi 5po, e 5t 2pi 10po

Le due prime digià impiegate nell'Articolo VIII. (pag. 161) danno per prodotto

1634t. t 3t pi 2t. po 3tl. 10t. pt.

Un parallelepipedo costruito su questa base, e sopra una tesa d'altezza conterrebbe

1634t. t. t 3t. t. pi 2t. t. po, 3t. tl 10t. t. pt.,

moltiplicando questo numero per 5t, 2pi, 10po, altezza del parallelepipedo proposto, avremo il volume di quest'ultimo

	1634t.t.t.	3t tpi	2t.tpo	3t.tl	10t.t.pt	
	5t	2pi	10po			
	8270					
Per 2t.t.p	1	4				
1t.t.pi		5				
Per 2t.t.po			10			
Per 3 t.t.t			1	3		
Per 6t.t.pt				2	6	
2t.t.pt					10	
2t.t.pt					10	
Per 2pi	544	5	0	9	3	$\frac{4}{12}$
Per 6po	136	1	3	2	3	$\frac{10}{12}$
						$\frac{3}{12}$
2po	45	2	5	0	9	$\frac{3}{12}$
2po	45	2	5	0	9	$\frac{3}{12}$
Prod.toj.	8944t.t.t	3t.tpi	1t.t.po	8t.t.l	3t.t.pt	$\frac{8}{12}$

In luogo di $\frac{8}{12}$ si può aggiungere un'unità alle tese-tese-punti.

Nella pratica si ha raramente bisogno di spingere i calcoli sino alle ultime suddivisioni com'io l'ho fatto quì sopra, perchè il lor valore è quasi nullo: e quando non si tratta che di determinare il prezzo d'un dato lavoro, la forma di queste suddivisioni è la più comoda: frattanto esse qualche volta riduconsi a misure cubiche, e per questo serve osservare, che la tesa cuba contenendo 216 piedi cubi,

la tesa-tesa-piede ne cont. $\frac{216}{6}$, ovvero 36;

la tesa-tesa-pollice. . . . $\frac{36}{12}$, ovvero 3;

la tesa-tesa-linea , $\frac{3}{12}$, ovv. $\frac{1}{4}$, ovvero

4320 cubi (poichè il piede cubo contiene 1728 pollici cubi);

la tesa tesa-punto $\frac{432}{12}$, ovvero 360 cubi.

In conseguenza si moltiplicano rispettivamente pei numeri 36, $3\frac{1}{4}$, 36 i diversi numeri delle suddivisioni indicate di sopra, coll'attenzione di moltiplicare per 432 il resto delle tese-tese-linee, se la divisione per 4 ne lasciasse uno, di contare il prodotto per de' pollici cubi, ed unirlo a ciò, che daranno le tese-tese-punti. Il numero

8944 t.t.t. 3t.t.pi. 1t.t.po. 8t.t.l. 4t.t.pt.
trovato di sopra diviene

8944 tese cube, 113 piedi cubi, 144 pollici cubi.

L'uso de' Mercanti di legname era di misurare questo genere non con lo tesa cuba, ma colla *soliva*, che d'essa avevano stabilita di 6 pollici *in quadro* su 12 piedi di lunghezza, vale a dire, formante un parallelepipedo rettangolo, la cui base fosse un quadrato di 6 pollici di lato, e l'altezza 12 piedi; questa base avendo $\frac{1}{2}$ piede di lato, contiene $\frac{1}{4}$ di piede qua-

dro, e moltiplicando per l'altezza 12, si trovano tre piedi cubi per il volume della soliva. Questo volume preso per unità, era diviso in sei parti chiamate *piedi di soliva*, ciascuno de' quali equivaleva in conseguenza ad $\frac{1}{2}$ piede cubo, ovvero a 864 pollici cu-

bi. Il piede di soliva si divideva pure in 12 parti chiamate *pollici di soliva*, e continenti in conseguenza ciascuno 72 pollici cubi:

Si vede, che le divisioni della soliva seguivano la medesima legge che quella della tesa cuba in tese

tese-piedi ec., e la soliva intera essendo di 3 piedi cubi, si trova essere la 72.ma parte della tesa cuba. Si può dunque, moltiplicandola per 72, convertire un numero di tese-cube, tese-tes-piedi, ec., in solive, e parti di soliva, con questo mezzo la *tesa di legname* rientrerebbe nelle regole della *tesa generale* di tre dimensioni. Non è punto più difficile di formarsi delle regole particolari per ottenere immediatamente il risultato della misura cubica d'un solido in solive.

Ma quando l'uniformità delle nuove misure, le quali riducono tutto al metro cubo, ovvero allo *stero*, e la loro suddivisione decimale, la quale rende tutte le operazioni simili a quelle, che si effettuano sui numeri interi, son preferibili a questi diversi metodi, comunque ingegnosi essi possan sembrare. Ponendole qui sotto gli occhi del Lettore in paragone col calcolo decimali, ho avuto principalmente per fine di render più mirabile l'immenso vantaggio di questi ultimi: vantaggio, del quale bisogna sperare che sarà convinta la Generazione futura, se la sua educazione sarà ben diretta su questo punto; poichè fino a tanto che gli Artefici non si disfaranno del piede, e della tesa, ch'essi portano seco loro, e che i medesimi se ne serviranno per prendere le loro misure, e che dopo aver fatto il calcolo secondo queste misure, essi dovranno ancora, per conformarsi alla Legge, convertire le antiche misure in nuove, egli è impossibile che essi vedano nel Sistema metrico decimale altra cosa che un'innovazione importuna. Finalmente sarebbe necessario che tutti quelli, i quali hanno dei numeri da prescrivere, tanto come Amministratori che come Ingegneri, scegliessero tanto quanto è possibile de' numeri tondi in nuove misure, come facevasi nelle antiche.

Le conversioni da un Sistema in un altro divenendo rare di più in più, si effettuerebbero senza pena mercè delle Tavole calcolate già da gran tempo per quest'oggetto; e quando non si avessero queste Tavole sotto manò, vi si supplirebbe calcolando mediante le dimensioni ridotte in nuove misure il valor del volu-

me, che si vuol esprimere con queste misure. In tal maniera formando il cubo del numero decimale, ch' esprime la tesa pel metro, si avrebbe il rapporto della tesa cuba al metro cubo.

Il legname da ardere misurasi disponendolo in una intelajatura, e la massa prende la forma d'un parallelepipedo rettangolo, il quale ha per base l'area di questa intelajatura, e per altezza la lunghezza dei pezzi. L'intelajatura, che determinava l'antica corda, aveva 8 piedi di lunghezza sopra 4 piedi di altezza, ed in conseguenza 32 piedi quadri di superficie. La lunghezza dei pezzi essendo di 4 piedi, la corda di legna conteneva 128 piedi cubi; e col mezzo di questo numero se ne calcolerebbe senza pena il rapporto col metro cubo, ossia stero.

Quando le misure non son de' parallelepipedi, ma de' cilindri, come lo erano i litroni, le staja, e come lo sono i litri, i loro volumi si calcolano col mezzo dell'espressioni proprie a questa forma di corpi.

X. Parlerò adesso del metodo, che bisogna impiegare per *estrarre* le radici secoude, o quadrate dei numeri. Suppone questo metodo, che si conoscano le secoude potenze o i quadrati di quei numeri, che sono espressi per mezzo d'una sola cifra: ecco dunque i nove primi numeri colle loro secoude potenze, o quadrati scritti al disotto di ciascheduno

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Si fa manifesto da questa Tavola, che la seconda potenza d'un numero espresso da una sola cifra, non ne contiene più di due: 10, ch'è il più piccolo numero espresso da due cifre, n'ha tre nel suo quadrato 100. A fine di prepararsi a decomporre la seconda potenza d'un numero espresso da due cifre, fa di mestieri osservare, che dalla Proposizione dimostrata all' Art. VIII. si deduce facilmente che, se un numero qualunque si consideri come composto di diecine e di unità, il quadrato di questo numero dee contenere il quadrato delle diecine, due volte il prodotto delle diecine per le unità, ed il quadrato delle unità.

Prendasi, per esempio, il numero 47, e si decomponga in $40+7$, oppure in 4 decine, e 7 unità: se si rappresentino per B le 4 decine ovvero 40 unità e per C le 7 unità, avremo, in virtù della Proposizione qui sopra enunciata, $(B+C)^2=B^2+2B\times C+C^2$; e sostituendo in luogo di B e C i loro valori otterremo

$$(40+7)^2=47\times 47=42\times 40+80\times 7+7\times 7$$

$$=1600+560+49=2209$$

Per ritornare adesso dal numero 2209, alla sua radice 47., osserveremo priemeramente, che il quadrato delle decine 1600 non ha cifre significative d'un ordine inferiore alle centinaia, ch'egli è il maggior quadrato, che possano contenere le 22 centinaia di 2209, poichè 22 cade tra 16, e 25, vale a dire tra il quadrato di 4, e quello di 5, come il 47 cade tra 4 decine, ovvero 40, e 5 decine, ovvero 50.

Se dunque cerchiamo il maggior quadrato contenuto in 22 troveremo 16, la cui radice 4 esprimerà le decine di quella di 2209; togliendo in seguito 16 centinaia, ovvero 1600, da 2209, il resto 609 conterrà ancora il doppio prodotto delle decine per le unità, cioè 560, ed il quadrato delle unità, ovvero 49. Ma il doppio prodotto delle decine per le unità, non avendo cifre d'un ordine inferiore alla decine dee trovarsi nelle due prime cifre 60 del resto 609, le quali conterranno inoltre le decine provenute dal quadrato dell'unità. Erattanto, se dividiamo 60 per il doppio delle decine 8, avremo, trascurandone il resto, un quoziente 7 eguale alle unità cercate. Dipoi, moltiplicando 8 per 7, formeremo il doppio prodotto delle decine per le unità, cioè 560; il quale tolto dal resto 609, otterremo una differenza 49, la quale debb'essere, e lo è difatto, il quadrato delle unità.

L'operazione, della quale ho sin qui ragionato, si dispone nel modo seguente

$$\begin{array}{r}
 22, 09 \mid 47 \\
 16 \quad \mid 87 \\
 \hline
 60, 9 \\
 68, 9 \\
 \hline
 000
 \end{array}$$

Si scrive il numero proposto come se si trattasse di dividerlo per un altro, e si destina per la radice il posto, che dovrebbe occupare il divisore. Dipoi si separano per mezzo d'una virgola le unità, e le diecine, affine di non considerare che le due prime cifre sulla sinistra, le quali debbono contenere il quadrato delle diecine della radice. Si cerca il maggior quadrato 16 contenuto in queste due cifre; si porta la radice 4 al posto, che le è stato destinato, e si toglie 16 da 22; allato del resto 6 s'abbassano le due altre cifre 09 del numero proposto; si separa l'ultima, che non entra nel doppio prodotto delle diecine per le unità; si divide la parte restante a sinistra per 8, doppio del numero delle diecine della radice, il che dà per quoziente le unità 7; e per formar simultaneamente le due ultime parti del quadrato, che deggion esser contenute in 609, si scrive 7 allato di 4, e ne risulta 87 eguale al doppio del numero delle diecine, più le unità, ovvero $2B+C$; il quale essendo moltiplicato per 7, ossia per C , riproduce $609 = 2B \times C + C^2$; ovvero il doppio prodotto delle diecine per le unità, più il quadrato delle unità: facendo la sottrazione non resta niente, e l'operazione terminata prova che 47 è la radice quadrata di 2209.

Si debba ancora estrar la radice quadrata da 324; dispongo l'operazione nel modo, che segue:

$$\begin{array}{r}
 3, 24 \mid 18 \\
 1 \quad \mid 28 \\
 \hline
 22, 4 \\
 224 \\
 \hline
 000
 \end{array}$$

e secondo ciò, ch'è stato già detto; trovo 1 per le die

cine della radice ; queste diecine , essendo raddoppiate , danno il numero 2 , per il quale bisogna dividere le due prime cifre 22 del resto. Ora 22 contiene 2 undici volte ; e nella radice non solamente non si può avere nè più di 10 nè 10 , ma anco il 9 stesso sarebbe troppo grande nel caso attuale ; poichè scrivendolo allato di 2 , e moltiplicando 29 per 9 , come la regola lo prescrive , s' avrebbe per risultato 261 , il quale non può togliersi da 224. Non si dee dunque riguardare la divisione di 22 per 2 , sennonchè come un mezzo approssimativo per trovar le unità ; e bisogna diminuire il quoziente ottenuto fino a tanto che arrivisi ad un prodotto , che non sorpassi il resto 224 : condizione ; alla quale soddisfa il numero 8 , poichè $8 \times 28 = 224$; dunque la radice cercata è 18.

Formando le tre parti del quadrato di 18 , si trova :

$$\begin{array}{r} B^2 = 100 \\ 2B \times C = 160 \\ C^2 = 64 \end{array}$$

$$\text{Totale} \qquad 324 = 18 \times 18 ;$$

e si vede chiaro che le sei diecine , le quali son contenute nel quadrato delle unità , essendo riunite a 160 , doppio prodotto delle diecine per le unità , alterano questo prodotto di maniera , che la divisione pel doppio delle diecine non può sempre dare le sole unità.

L' estrazione della radice quadrata d' un numero composto di tre , o quattro cifre , non dee portare difficoltà dopo ciò , che precede ; ma sono per altro necessarie a notarsi alcune particolarità per porre il Lettore in istato d' estrar la radice da un numero espresso da quante cifre si vogliano ; e vedremo che ciò dipende dai principj digià spiegati.

Ogni numero intero al di sotto di 100 non avrà che quattro cifre nel suo quadrato ; poichè quello di 100 è 10000 , ovvero il più piccol numero espresso da cinque cifre. Ciò posto , per esaminare la formazione del quadrato d' un numero al di sopra di 100 , come di 473 , per esempio , si potrà decompor questo nu-

mero in $470+3$, ovvero 47 diecine più 3 unità; e per dedurre il suo quadrato dalla formula

$$B^2 + 2B \times C + C^2$$

faremo $B=47$ diecine $=470$ unità, $C=3$ unità, d'onde

$$B^2 = 220900$$

$$2B \times C = 2820$$

$$C^2 = 9$$

$$\text{Totale} \quad 223729 = 473 \times 473.$$

Si vede perciò in quest' esempio, che il quadrato delle diecine non ha cifre significative, d'un ordine inferiore alle centinaja; e ciò debb' essere in generale, poichè delle diecine moltiplicate per delle diecine producon sempre delle centinaja (*Aritm.* 32)

Dunque nella parte 2237, che resta sulla sinistra del num.^o proposto, dopo che n'avrem separate le diecine, e le unità, dobbiamo cercare il quadrato delle diecine; e siccome 473 cade tra 47 diecine, ovvero 490, e 48 diecine, ovvero 480, il 2237 dee cadere tra il quadrato di 47, e quello di 48; dal che procede che il maggior quadrato contenuto in 2237 sarà quello di 47, ovvero quello delle diecine della radice. È dunque evidente che, per trovar queste diecine, bisogna operare come se si volesse estrarre la radice quadrata da 2237; ma, in vece di giunger così ad un risultato esatto, si troverà un resto contenente le centinaja formate dal doppio prodotto delle 47 diecine moltiplicate per le unità.

Per effettuare il calcolo, si dispone l'operazione come si vede qui appresso

22; 37, 29	473
16	87
63, 7	943
60, 9	
282,9	
282,9	
000 0	

Si separano in primo luogo le due ultime cifre 29, e per estrar la radice dal numero 2237, che resta sulla sinistra, si separano pure le due ultime cifre 37. di questo numero; in questa maniera il numero proposto è diviso in membri di due cifre ciascuno, andando dalla destra verso sinistra. S'opera sopra i primi due membri come abbiain fatto nel numero precedente sul numero 2209, e si ottengono le due prime cifre della radice 47, ma si trova un resto 28, il quale unito alle due cifre 29 dell'ultimo membro contiene il prodotto di 47 diecine per le unità, ed il quadrato delle unità. Si separa la cifra 9, la quale non può far parte del doppio prodotto delle diecine per le unità, e si divide 282 per 94, doppio di 47 diecine; scrivendone il quoziente 3 allato del 94, e moltiplicando 943 per 3, viene 2829; numero precisamente eguale all'ultimo resto: e l'operazione è così terminata.

Per far vedere come si debba operare sopra un numero qualunque, pos o ad estrar la radice, da 22391824. Qualunque sia questa radice, possiamo sempre concepirla decomposta in diecine, e unità, come negli esempj precedenti. Il quadrato delle diecine non avendo alcuna cifra significativa d'un ordine inferiore alle centinaja, le due ultime cifre 24 non potranno esservi comprese. Si separeranno dunque; e il Problema sarà ridotto primieramente a cercare il maggior quadrato contenuto nelle parti 223918, che resta a sinistra. Questa parte essendo composta di più di due cifre, bisogna concludere che il numero, il quale esprime le diecine della radice cercata, ha più d'una cifra; questo numero può dunque anch'esso esser decomposto come gli altri in diecine, e unità. Il quadrato di queste diecine non eutrando punto nelle due ultime cifre 18 della parte 223918, sarà dunque nelle cifre 2239, che restano a sinistra, dove bisognerà cercare questo quadrato; e poichè 2239 ha pure più di due cifre, il quadrato, ch'egli dee contenere, ne conterrà almeno due nella sua radice; il numero esprimente le diecine, che noi cerchiamo, avrà dunque più d'una cifra, egli è perciò finalmente in

22, che bisogna cercare il quadrato di quel numero, che rappresenta le unità dell'ordine di più elevato della dimandata radice. Da questa serie di ragionamenti, che si possono spingere tanto lontano che si vorrà, il numero proposto si troverà diviso in membro di due cifre andando dalla destra a sinistra; ma è bene nulladimeno d'essere prevenuti, che l'ultimo membro a sinistra potrà non contenere che una sola cifra.

Il numero proposto essendo così diviso in membri, e distribuito come si vede nell'esempio, che segue, s'opera sui tre primi membri come nell'esempio del num. antecedente; ed

22,39,18,24	4732
189 si abbassa il quarto mem- bro 24, e si considera il nu- mero 18924 come contenente il doppio prodotto delle 473 diecine trovate per le unità cercate, più il quadrato di que- ste unità. Si separa l'ultima cifra 4, e si dividono quelle che restano a sinistra, per 946 doppio di 473; e si fa in seguito la verificaione del	87 943 9462 301,8 282,9 1892,4 1892,4 0000,0

quoziente 2, come nelle operazioni antecedenti.

L'operazione si termina a questo punto nell'esempio precedente: ma è facil vedere che, se vi fosse un membro di più, le quattro cifre trovate 4732 esprimerebbero le diecine d'una radice, di cui si cercherebbero le unità: e che, per conseguente, bisognerebbe dividere il resto, che allora si avrebbe, più la prima cifra del membro seguente pel doppio di queste diecine; e così di seguito per ciascuno dei membri da abbassarsi successivamente uno dopo dell'altro.

Se succedesse che dopo d'aver abbassato un membro, il resto unito alla prima cifra di questo membro non contenesse il doppio delle cifre trovate, bisognerebbe porre zero nella radice; poichè allora la radice non avrebbe unità di quest'ordine: si abbasserebbe in segui-

to il membro seguente per continuare l'operazione secondo il solito. L'esempio qui unito è relativo a questo caso.

49,42,09	703
04,209	
00 00 0	1403

Nou si sono scritte le quantità da sottrarsi, ma sonosi effettuate le sottrazioni a mente, come nella divisione si è fatto.

Tutti i numeri proponibili non sono quadrati perfetti; e gettando gli occhi sulla Tavola alla pagina 166 si vede, che, tra i quadrati di ciascuno dei novè primi numeri esistono delle lacune, ove si comprenderebber più numeri intermedj consecutivi, i quali non hanno la corrispondente radice, 45, per esempio, non è un quadrato, poichè cade tra 36, e 49. Succederà il più delle volte che il numero, del quale si cercherà la radice quadrata, non l'avrà; ma operando come se il numero l'avesse, il risultato sarà la radice del maggior quadrato possibile, ch'esso contiene. Se si cerca, per esempio, la radice di 2276, troveremo 47, e resterà 67: lo che dimostra, che il maggior quadrato contenuto in 2276 è quello di 47, ovvero 2209.

Siccome potrebbe restar dubbiezza, dopo d'aver trovata la radice del maggior quadrato contenuto in un numero, d'aver posta qualche cifra troppo debole nella radice, ecco un mezzo, onde riconoscere se il resto sia troppo considerabile, e se la radice trovata sia troppo piccola. Il quadrato di $B+C$ essendo

$$B^2 + 2B \times C + C^2$$

se facciamo $=1$, il quadrato di $B+1$ sarà

$$B^2 + 2B + 1;$$

quantità, che differisce da B^2 , quadrato di B , del doppio di B più l'unità. Dunque, se la radice trovata dovesse essere aumentata dell'unità, o di più dell'unità, bisognerebbe che il suo quadrato, tolto dal numero proposto, lasciasse un resto almeno eguale adue volte questa radice, più l'unità. Tutte le volte che questa circostanza non avrà luogo, la radice estratta è sicuramente quella dal maggior quadrato contenuto nel numero proposto.

Poichè, all'effetto di moltiplicare una frazione per una frazione, bisogna moltiplicare i numeratori tra lo-

ro, come pure i denominatori, è manifesto che il prodotto d'una frazione per se stessa, ovvero il quadrato d'una frazione è eguale al quadrato del suo numeratore, diviso per il quadrato del suo denominatore. Segue da ciò che, per estrarre la radice quadrata da una frazione, bisogna estrar quella del suo numeratore, e quella del suo denominatore. Così la radice di $\frac{25}{64}$ è $\frac{5}{8}$, perchè 5 è la radice quadrata di 25, e 8 quella di 64.

E una cosa importantissima da osservarsi, che non solamente i quadrati delle frazioni propriamente dette son sempre delle frazioni, ma che ogni numero frazionario irriducibile, essendo moltiplicato per se medesimo, darà sempre un numero frazionario pure irriducibile (a).

Resulta da quest'ultima Proporzione, che tutti i numeri interi, i quali non sono quadrati perfetti non hanno radice non solamente in numeri interi, ma neppure in numeri frazionarij. Tuttavia si concepisce che debb'essere una quantità, la quale moltiplicata per se stessa produca un numero qualunque, 2276, per esempio, e che in tal caso questa quantità è compresa tra 47, e 48; poichè 47×47 dà un prodotto minore di questo numero. 48×48 ne dà uno maggiore; e dividendo l'intervallo, che v'è tra 47, e 48 in frazioni, si trovan dei numeri frazionarij, i quali moltiplicati per loro stessi danno dei prodotti maggiori del quadrato di 47, minori di quello di 48; ed approssimanti di più in più al numero 2276.

L'estrazione della radice quadrata, applicandola ai numeri, i quali non son quadrati perfetti, dà dunque origine ad una nuova specie di numeri, nello stesso modo che la divisione genera le frazioni: ma evvi questa differenza tra le frazioni, e le radici dei numeri, i quali non sono quadrati perfetti, cioè, che

(a) Vedetè la dimostrazione nel n. 97 degli *Elementi d'Algebra*.

i primi i quali si comppongono sempre d' un numero esatto di parti dell' unità, hanno con quest' unità una *misura comune*, ovvero un rapporto espresso da dei numeri, interi, laddovechè i secondi non l' hanno.

Se, a causa d' esempio, si concepisca l' unità come divisa in cinque parti, e s' esprima con nove di queste parti il quoziente della divisione di 9 per 5, ovvero $\frac{9}{5}$; $\frac{1}{5}$, ossendo contenuto cinque volte nel-

l' unità, e nove volte in $\frac{9}{5}$, è la *comune misura*

dell' unità, e della frazione $\frac{9}{5}$; ed il rapporto di queste quantità è quello de' numeri interi 5, e 9.

Considerando che i numeri interi, come pur le frazioni, hanno coll' unità una misura comune, si dice che queste quantità sono *commensurabili* coll' unità, ovvero semplicemente *commeasurabili*; e perchè i loro *rapporti*, o *ragioni*, che hanno coll' unità son espresse da numeri interi, s' indicano pure i numeri interi, e le frazioni sotto la comune denominazione di *numeri razionali*.

Al contrario le radice quadrata d' un numero, il quale non è quadrato perfetto, è *incommensurabile*, ovvero *irrazionale*; perchè, questa non potendo essere rappresentata da alcuna frazione, ne segue che in qualunque numero di parti si opponga divisa l' unità; non ve ne sarà mai alcuna, per quanto piccola sia, che possa misurare insieme, ed in una maniera esatta, tanto la radice, quanto l' unità.

Per denotare generalmente una radice da estrarsi, sia che si possa ottenerla esattamente, o nò, ci scriviamo del segno $\sqrt{}$, che chiamasi *radicale*:

$\sqrt{(16)}$ è la stessa cosa che 4,

$\sqrt{(2)}$ è *incommensurabile*, o *irrazionale*.

Benchè non si possa per mezzo d' alcun numero intero, o frazionario ottenere un' espressione esatta di $\sqrt{(2)}$, nulladimeno possiamo approssimarvi di tanto quanto si vuole, convertendo questo numero 2 in una frazione, il cui denominatore sia un quadrato; e la

radice del numeratore, presa solamente in numeri interi più prossimi alla vera, darà quella del numero proposto, espressa in parti della specie indicata dalla radice quadrata del denominatore.

Se si converta, per esempio, il numero 2 in 25.mi, avremo $\frac{50}{25}$. La radice di 50 essendo 7 in numeri interi, e quella di 25 essendo esattamente 5, avremo $\frac{7}{5}$, ovvero $1\frac{2}{5}$ per la radice di 2; valore, che differisce dal vero meno d'un quinto.

È manifesto da questa operazione fondata sopra ciò, che abbiamo veduto quì sopra, che il quadrato d'una frazione vien espresso da una nuova frazione, che abbia per numeratore il quadrato del numerator primitivo, e per denominatore il quadrato del denominatore parimente primitivo; e ch'essi s'applica a qualunque specie di frazioni che sia, e più facilmente ancora alle decimali, che a tutte l'altre. Infatti segue dallo stesso principio, che il quadrato d'un numero espresso in decimi debb'esser composto di centesimi; quello d'un numero espresso in centesimi debb'esserlo in dieci-millesimi, e così di seguito; e che in conseguenza *il numero delle cifre decimali del quadrato è sempre doppio di quello delle cifre della radice.* Quest'ultima osservazione può dedursi ancora dal principio della moltiplicazione dei numeri decimali, come quella che vuole, che un prodotto contenga tante cifre decimali quante ve ne sono in uno insieme dei fattori e nell'altro. Nel caso attuale il numero proposto considerato come il prodotto della sua radice moltiplicata per se stessa, dee avere due volte tante cifre decimali quante n'ha questa radice.

Essendo tutto ben inteso quel, che precede, è facil concludere che, se si vuole ottenere la radice quadrata di 227, per esempio, approssimata fino alle centesime parti, bisogna ridur questo numero in dieci-millesime, e vale a dire, aggiungere quattro zeri alla destra di questo numero, il che darà 2270000 dieci-millesimi; dalle quali n'estrarremo la radice come dai

un consimil numero d' unità: ma per indicare, che il risultato debb' essere in centesime, separeremo con una virgola le due ultime cifre alla destra. Troveremo in questa maniera, che la radice di 227, coll' errore più piccolo d' una centesima, è 15,06. Eccone l' operazione.

$$\begin{array}{r}
 2,27,00,00 \mid 1506 \\
 \hline
 12,7 \quad \quad \mid 25 \\
 2 \ 00 \ 00 \quad \mid 3006 \\
 19 \ 64 \quad \quad \mid .
 \end{array}$$

Se il numero proposto contenesse di già dei decimali, bisognerebbe renderne il loro numero pari, conferme lo vuole l' estrazione della radice. A fine d' estrarre; per esempio, la radice di 51,7, si porrebbe uno zero in seguito di questo numero perchè egli avesse almeno delle centesime, e s' estrarrebbe in appresso la radice quadrata da 51,70. Se si volesse avere una decimale di più, si porrebbero due altri zeri in seguito di questo numero; il che darebbe 51,7000, e troverebbesi 7,19 per la sua radice.

Quei, che vorranno esercitarsi, potranno cercare le radici quadrate de' numeri 2, e 3 con sette cifre decimali; il che esigerà ch' essi pongano quattordici zeri alla destra di questi numeri, e dovranno trovare per risultati

$$\sqrt{2}=1,4142136, \sqrt{3}=1,7320508.$$

All' effetto d' approssimarsi alla radice quadrata d' una frazione, l' idea, che ci si offre in principio, è quella d' estrarre per approssimazione la radice quadrata dal numeratore, e dal denominatore. Ma con un poco di riflessione ci accorgeremo ben presto che si può evitare una di queste operazioni, facendo in modo che il denominatore sia un quadrato perfetto; e ciò non riducesi ad altro che a moltiplicare i due termini della frazione proposta per questo denominatore. Se si avesse, per esempio, da estrarre la radice quadrata da $\frac{3}{7}$, si cangerebbe questa frazione in

$$\frac{3 \times 7}{21}$$

$$\frac{7 \times 7}{49}$$

moltiplicando i suoi due termini per il denominatore 7. La radice del numeratore di quest'ultima frazione, essendo presa in numeri interi, darà $\frac{4}{7}$ per radice quadrata di $\frac{3}{7}$; e questa radice differisce dal vero meno d'un settimo.

Ad oggetto di ottenere un maggior grado di esattezza, bisognerebbe convertire, almeno per approssimazione, la frazione $\frac{3}{7}$ in un'altra, il cui denominatore fosse il quadrato d'un numero maggiore di 7. Avrebbe, per esempio, approssimata presso a $\frac{1}{15}$ la radice cercata, se si convertisse $\frac{3}{7}$ in $\frac{225}{675}$, poichè 225 è il quadrato di 15: così verrebbe $\frac{675}{225}$ di 225mi, ov. vero $\frac{96}{225}$; valore, che differisce dal vero meno di $\frac{1}{225}$: la radice di $\frac{96}{225}$ è tra $\frac{9}{15}$ e $\frac{10}{15}$; ma si approssima più alla seconda frazione che alla prima, perchè 96 è più vicino a 100 che 81: si avrebbe dunque $\frac{10}{15}$ oppure $\frac{2}{3}$ per la radice di $\frac{3}{7}$, la quale differisce dal vero meno di $\frac{1}{15}$.

Se si volessero impiegare i decimali per estrarre la radice approssimativa dal numeratore della frazione $\frac{21}{49}$, si troverebbe 4, 583 per la radice approssimata del numeratore 21, e si dividerebbe questo risultato per la radice del nuovo denominatore. Spingendo il quoziente fino alla terza decimale, si trova 0,655.

Resta adesso a parlare del metodo, che dee seguirsi per estrarre la radice terza o cubica da un numero qualunque.

Prima di tutto conviene conoscere i cubi de' numeri composti d' una sola cifra ; nella tavola seguente ci sono questi numeri , e i loro rispettivi cubi.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Quando dunque si dovrà estrarre la radice cubica da uno de' numeri , che sono nella seconda linea della precedente Tavola , questa radice sarà il numero corrispondente al di sopra nella prima linea.

I numeri composti di più d' una cifra hanno i loro cubi composti di più di tre cifre : io , che è il numero più piccolo di tutti quelli di due cifre , ha per cubo 1000, ch'è il più piccolo de' numeri di quattro cifre.

Per trovare il detto metodo d' estrazione della radice cubica , quando questa è composta di più d' una cifra , esaminiamo ciò , che succede nella formazione del cubo d' un numero composto di dieci e d' unità.

Poichè il cubo resulta dal quadrato d' un numero moltiplicato pel numero medesimo , prendiamo la espressione $B^2 + 2B \times C + C^2$, che come abbiamo veduto a pag. 153 , rappresenta il quadrato d' un numero composto delle due parti B e C , e moltiplichiamola per $B + C$, onde aver quella , che rappresenta $(B + C)^3$, ovvero il cubo del detto numero $B + C$; otterremo ————— $(B + C)^3 =$

$$(B^2 + 2B \times C + C^2) \times B + (B^2 + 2B \times C + C^2) \times C ;$$

ma $(B^2 + 2B \times C + C^2) \times B =$

$B^3 + 2B \times B \times C + B \times C^2$
(giacchè qualunque sia l'ordine , nel quale si moltiplicano i fattori , non cangia di valore il prodotto ,
(Aritm. n.º 70),

$$= B^3 + 2B^2 \times C + B \times C^2 ;$$

e parimente

$$(B^2 + 2B \times C + C^2) \times C =$$

$(B^2 \times C + 2B \times C \times C + C^2 \times C = B^2 \times C + 2B \times C^2 + C^3 ,$
dunque riunendo avremo.

$$(B + C)^3 =$$

$$B^3 + 2B^2 \times C + B \times C^2 + B^2 \times C + 2B \times C^2 + C^3$$

$$= B^3 + 3B^2 \times C + 3B \times C^2 + C^3$$

Supponendo dunque, che B e C rappresentino rispettivamente le diecine e le unità, nelle quali può decomporci un numero qualunque, si fa manifesto, che il cubo, o la terza potenza, d'un numero composto di diecine e di unità contiene quattro parti, cioè, il cubo delle diecine, tre volte il quadrato delle diecine moltiplicato per le unità, tre volte le diecine moltiplicate pel quadrato delle unità, e finalmente il cubo delle unità.

Formiamo adesso il cubo d'un numero composto di diecine e di unità, per esempio, di 47; decomporremo questo numero in 40+7, ovvero in quattro diecine più sette unità, onde avremo B eguale a quattro diecine ovvero 40 unità, e C eguale a 7 unità: e sostituendo i valori di $B=40$, $C=7$ nell'espressione $B^3+3B^2\times C+3B\times C^2+C^3$, che rappresenta il cubo di $B+C$, dessa si cangerà in $64000+33600+5880+363=103823$, ch'è appunto il cubo di 47, ovvero $47+47\times 57$.

Per ritornare adesso dal cubo 103823 alla sua radice 47, osserveremo primieramente che 64000, cubo delle 4 diecine, non ha cifre significative d'un ordine inferiore alle migliaia; possiamo dunque, nella ricerca del cubo delle diecine, far astrazione dalle centinaia, dalle diecine, e dalle unità del numero 103823. Dopo di ciò, disponendo l'operazione come per l'estrazione della radice quadrata, separeremo le tre prime cifre sulla destra con una virgola; il maggior cubo contenuto in 103 sarà 103,823 — 47 quello delle diecine. Vedremo dal-

la Tavola precedente, che questo	64	48
cubo è 64, la cui radice è 4;	—	—

porrem dunque 4 nel posto destinato per la radice. Si sottrarrà in seguito 64 da 103; ed allato del resto 39 abbassaremo le tre ultime cifre. Il resto totale 39823 conterrà ancora tre parti del cubo, cioè, tre volte il quadrato delle diecine moltiplicato per le unità; ovvero $3 B^2\times C$, tre volte le diecine moltiplicate per il quadrato delle unità, ovvero $3B\times C^2$, e il cubo delle unità, ovvero C^3 . Se s'avesse il valor del prodotto $3B^2\times C$, siccome si conosca di già le diecine B, dividendo questo prodotto

per $5B^2$, s' otterrebbero le unità C ; ma benchè non conosco $3B^2 \times C$, sappiamo frattanto, che questo prodotto non debbe avere alcuna cifra significativa d' un ordine inferiore alle centinaja, poichè desso contiene il fattore B^2 , ch' esprime il quadrato delle diecine; non può dunque trovarsi che nella parte 398, che resta, del numero 39823, dopo che si son separate le diecine, e le unità; parte che contiene inoltra le centinaja, che provengono dal prodotto $3B \times C^2$ delle diecine per il quadrato delle unità, ed il cubo C^3 delle stesse unità.

Dividendo 398 per 48, ch' esprime, nell' esempio proposto, il triplo del quadrato delle diecine $3B^2$ ovvero 3×16 , troverem per quoziente 8; ma ciò, che precede, fa vedere che non si dee adottar questa cifra per le unità della radice cercata senza averla prima verificata; ciò si fa formando le tre ultime parti del cubo, che dee contenere il resto 39823. Facendo $C=8$, si trova

$$\begin{array}{r} 3B^2 \times C = 38400 \\ 3B \times C^2 = 7680 \\ C^3 = 512 \end{array}$$

Totale 46592;

e questo risultato sorpassando 39823, prova che bisogna diminuire il numero 8 preso per le unità. Provando 7 nella stessa maniera, si vede, ch' esso soddisfa alle condizioni, e che per conseguenza 47 è la radice cercata.

In vece di fare la verificazione, che ho eseguita, si preferisce per ordinario d' alzare immediatamente al cubo il numero, ch' esprimono le due cifre trovate, moltiplicandolo pel suo quadrato. Operando in questa maniera sopra 48, si troverà

$$48 \times 48 \times 48 = 110592;$$

e questo numero essendo maggior del proposto 103823, mostra pure, che la cifra 8 è troppo grande.

Ciò, che abbiamp praticato sull' esempio qui sopra, dev' effettuarsi nella stessa maniera sopra tutti i nume-

ri espressi da più di tre cifre , e meno di sette. Avendo separate le tre prime verso la destra , cercheremo il maggior cubo contenuto nella parte restante a sinistra ; porteremo la sua radice nel posto , che le è stato destinato ; toglierem. questo cubo dalla parte del numero proposto , sulla quale abbiamo operato ; allato del resto abbasseremo le tre ultime cifre ; separeremo le diecine , e le unità ; e divideremo ciò , che resta a sinistra , per il triplo del quadrato delle diecine trovate : ma prima di scrivere il quoziente alla radice , lo verificheremo alzando al cubo il numero , ch' esprime questa cifra unita alle diecine cognite. Se il risultato di quest' operazione è troppo grande diminuiremo la cifra delle unità ; procederemo a una nuova verificaione ; e così in seguito fino a che non si trovi un risultato eguale al numero proposto , o minore di questo numero , se desso non è un cubo perfetto. In questo caso la radice trovata non è che quella del maggior cubo , ch' esso contiene. Siccome abbiamo spesso dei resti considerabilissimi , ecco da che cosa potremo conoscere se la cifra delle unità è troppo piccola.

Il cubo di $B+C$, allorchè facciamo $C=1$, divien quello di $B+1$, allorchè facciamo $C=1$, divien quello di $B+1$; ed ha per espressione

$$B^3 + 3B^2 + 3B + 1 ;$$

quantità , la quale sorpassa B^3 , cubo di B , di $3B^2 + 3B + 1$.

Segue da ciò , che fintantochè il resto d' un' estrazione della radice cuba sarà minore di tre volte il quadrato della radice , più tre volte la radice , più l' unità , questa radice non sarà troppo piccola.

Per estrar la radice cuba da 105823817 , osserveremo primieramente , che qualunque sia il numero delle cifre di questa radice , se dessa si decompone in unità , e diecine , il cubo di quest' ultime non potrà far parte delle tre ultime cifre verso la destra , e dovrà per conseguenza trovarsi in 105823. Ma il mag-

gior cubo contenuto in 105823 avrà più d'una cifra nella sua radice, la quale potrà in conseguenza decomporli in unità, e diecine, ed il cubo di queste diecine, non discendendo al disotto delle migliaia, non potrà far parte delle tre ultime cifre 823. Se, dopo la separazione di queste, restasser sempre più di tre cifre verso la sinistra, si ripeterebbe il ragionamento precedente, ed arriverebbersi così ad indicare il posto del cubo delle unità dell'ordine sì più elevato della radice cercata col dividere il numero proposto in membri di tre cifre, andando dalla destra alla sinistra; l'ultimo potrà contenerne meno di tre.

Ciò posto, dopo di aver preparata l'operazione secondo il solito, cercheremo primieramente, per la regola pocanzi data, la radice cubica dei due primi membri a sinistra, e troveremo 47 per 105,823,817 | 473
 risultato; toglieremo il cubo di questo numero dai due membri, 64 | 48
 che lo contengono; allato del resto 6627
 2000 abbasseremo il membro seguente 817; ed il numero 2000817 1038,23
 dee contenere le tre ultime parti del cubo d'un numero, del quale 47 esprime le diecine, e di cui 105 823 817 si cercano le unità: troverem dunque queste unità, come nell'esempio precedente, separando le due ultime cifre verso la destra del resto, e dividendo la parte a sinistra per 6627, triplo del quadrato di 47. Verificheremo il quoziente 3 alzando 473 a cubo, e troveremo per risultato lo stesso numero proposto, perchè questo numero è un cubo perfetto.

La spiegazione dell'esempio quì sopra può tenere il luogo di regola generale. Se il numero proposto avesse un membro di più, si continuerebbe l'operazione come l'abbiam fatto pel terzo, e non bisognerebbe mancare di porre uno zero alla radice se il numero da dividersi sulla sinistra del resto non contenesse quello, pel quale bisogna dividerlo: abbasserebbersi allora il membro seguente, s'opererebbe su questo membro riunito al resto come sui precedenti.

Poichè il cubo d'una frazione si ottiene moltiplicando questa frazione pel suo quadrato, ovvero, ciò ch'è lo stesso, cubando il suo numeratore, e cubando il suo denominatore, ne segue, che ricaderemo sulla radice prendendo quella del nuovo numeratore, e quella del nuovo denominatore. Il cubo di $\frac{5}{6}$, per esempio, $\frac{125}{216}$; prendendo la radice cubica di 125, e quella di 216, si ritrova $\frac{5}{6}$.

Tal'è il metodo, che bisogna seguire allorchè il numeratore, e denominatore sono ambedue cubi perfetti: ma allorchè ciò non ha luogo, ci risparmiamo la pena d'estrar la radice dal denominatore moltiplicando pel suo quadrato i due termini della frazione proposta; poichè denominatore risultante da quest'operazione diviene il cubo del denominator primitivo, e non resta che a prendere la radice del numeratore.

Se si avesse, per esempio, $\frac{3}{5}$, moltiplicando i due termini di questa frazione per 25, quadrato del denominatore, avrebbesi

$$\frac{75}{5 \times 5 \times 5};$$

la radice del denominatore è 5: quanto a quella di 75, si trova ch'essa è tra 4, e 5. Limitandosi a 4, avremo $\frac{4}{5}$ per la radice cubica di $\frac{3}{5}$, prossima al vero colla differenza minore di $\frac{1}{5}$. Per aver una maggior esattezza, bisognerà estrar la radice approssimativa da 75 col mezzo, che indicherò in seguito.

Allorchè il denominatore sarà già un quadrato perfetto, servirà moltiplicare i due termini della frazione per la radice quadrata del denominatore. Così, per trovar la radice cubica di $\frac{4}{9}$, moltiplico i due termini per 3, radice quadrata di 9, ed ottengo

$$\frac{12}{3 \times 3 \times 3}$$

prendendo la radice del maggior cubo 8 contenuto in 12, s' ottiene $\frac{2}{3}$ per la radice cercata, che differisce dal vero meno di $\frac{1}{3}$.

Con un ragionamento analogo a quello, che si è fatto a pag. 174 rispetto alle radici quadrate dei numeri, che non sono quadrati, riconosceremo, che neppure la radice cubica d' un numero, il quale non è un cubo perfetto, può esprimersi esattamente per alcuna frazione, comunque grande sia il suo denominatore: dessa sarà dunque una quantità irrazionale.

Il miglior mezzo d' impiegare le frazioni ordinarie per ottenere la radice cubica di un numero non cubo consiste nell' estrar la radice in frazioni d' una specie data. Affine di conseguir, per esempio, la radice cubica di 22, che differisca dal vero meno della quinta parte dell' unità, osserveremo che il cubo di $\frac{1}{5}$ è $\frac{1}{125}$, e ridurremo in conseguenza 22 in $\frac{2750}{125}$: essendo la radice cuba di 2750 presa in numeri interi, avremo $\frac{14}{5}$, ovvero $2\frac{4}{5}$ per quella di 22.

Il mezzo, ch' è più in uso ond' estrarre per approssimazione la radice cubica d' un numero, consiste nel convertir questo numero in frazione decimale; ma è da osservarsi, che ciò non può essere se non in millesime, o in millionesime parti, ec. perchè le decime divengon millesime allorchè s' alzano alla terza potenza, le centesime si cangiano in milionesime, ed in generale il numero delle cifre decimali, che si trovano nel cubo, è triplo di quella, che ne contiene la radice. Bisogna concluder da ciò, che si dee porre in seguito del numero proposto tre volte tanti zeri quanti sono i decimali, che si vogliano nella sua radice. Faremo in appresso l' estrazione secondo le regole precedentemente esposte, e separeremo nel risultato il numero di cifre decimali richiesto.

Se si volesse aver, per esempio, la radice cubica di 327, che differisca dal vero men d' un cente-

simo, si scriverebber sei zeri in seguito a questo numero, e s'estrarrebbe, secondo la regola, la radice da 327000000. Eccone l'operazione.

$$327,000,000 \quad | \quad 688$$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 108 \\ \hline & 13872 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1110,00 & \\ \hline 314432 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125680,00 \\ 325660672 \end{array}$$

$$1339328.$$

Si separerebbero in seguito due cifre decimali sulla destra del risultato, e s'avrebbe 6,88: ma sarà più esatto il prendere 6,89, perchè il cubo dell'ultimo numero, benchè maggiore di 327, si approssima più di quello di 6,88.

Se il numero proposto contenesse già dei decimali, bisognerebbe, prima di cominciar l'estrazione, porre alla destra tanti zeri quanti ne sarebbero necessari per rendere il numero delle cifre decimali multiplo di 3. Sia, per esempio, 0,07; scriveremo 0,070: prendendo la radice di 70 millesime, troveremo 0,4. Per ispingere l'esattezza fino ai centesimi, bisognerebbe porre altri tre zeri, il che farebbe 0,070000. La radice di 70000, estratta in numeri interi, essendo 41, quella di 0,07, esatta fino ai centesimi, sarà 0,41.

Fine del Supplemento.

SDN 607313



1877

A V V E R T I M E N T O

DELL' EDITORE NAPOLITANO



Al Corso dell'Aritmetica di Lacroix si è unito in questa nuova Edizione Italiana il Supplemento pubblicato dal medesimo celebre autore, e posto in fronte de' suoi Elementi di Geometria; perchè mediante questa aggiunta trovassero gli Studiosi raccolte in un solo Volume tutte quelle notizie, che servono indispensabilmente a ben comprendere un Corso in ogni parte compiuto di Geometria Elementare.

Si sono omesse però nel Supplemento, che si riporta, le citazioni, e le poche osservazioni, che rimandavano il Leggitore agli Elementi Geometrici suddivisati. E mancando il Supplemento citato delle Operazioni o dei Metodi conducenti ad estrarre le Radici quadrate e cubiche da ogni Numeri è stato, come dovevasi, a tal mancanza supplito coll'aggiungere quelli, che dall'istesso Autore sono stati esposti nei suoi Elementi d'Algebra.

I Metodi precitati d'estrazione delle Radici, che fanno parte di questo Trattato; sonosi fedelmente trasoritti dall'Opera sunnominata, salvo quei pochi e leggerissimi cambiamenti, ed aggiunte necessarie per fare un tutto, che avesse ad un tempo regolarità, connessione, e chiarezze.

OTR. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.

11. 11. 11. 11. 11.







